II. ECUACIONES GOBERNANTES

A lo largo de nuestro estudio de los fenómenos de la hidráulica marítima haremos uso extenso de la habilidad de las matemáticas para describir, al menos en forma simplificada, las interrelaciones entre diferentes variables físicas a través de las ecuaciones gobernantes de estos fenómenos. Estas expresiones son las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (E.D.D.P.) que se obtienen a través de expresar principios físicos generales, como la conservación de masa y de momentum en una forma matemática estricta adecuada a nuestros propósitos de estudio. Una vez con estas ecuaciones gobernantes a la mano, el resto de nuestro estudio de hidráulica marítima se limitará a encontrar soluciones a ellas, a la interpretación física de estas soluciones y a la búsqueda de su utilización práctica en la solución de problemas de ingeniería.

II.1 REPASO DE HIDRODINAMICA

Esta sección no pretende deducir en detalle las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluídos, sino solo repasarlas como un recordatorio. El lector debe estar familiarizado con ellas y con su deducción. De no ser así, se recomienda la consulta de algún texto básico de mecánica de fluídos, antes de continuar a las siguientes secciones. Este repaso es útil para todos, puesto que en él se presentan las ecuaciones fundamentales en la forma y con la nomeclatura en que serán utilizadas en el resto de este estudio. Además nos permitirá ubicar las ecuaciones que manejaremos, en el tema que nos atañe, dentro del contexto de la mecánica de fluídos en general.

II.1.1 **Enfoque Lagrangiano vs. Euleriano**

En mecánica se utilizan tradicionalmente dos enfoques diferentes que tienen que ver con la situación del observadorcon respecto al objeto cuyo movimiento se estudia. Esto es especialemnte importante y común cuando la materia en estudio es un fluído. Cuando el observador estudia a una partícula siguiéndola a través de su movimiento en el flujo se dice que la estudia con el enfoque Lagrangiano. Sin embargo, si el observador se coloca en una localización fija y estudia a las partículas que pasan por esta localización en su movimiento, se dice que utiliza el enfoque Euleriano. Las ecuaciones que describen un mismo campo de movimiento son diferentes dependiendo de la actitud o situación del observador con respecto a las partículas. El enfoque Lagrangiano es ampliamente utilizado en la mecánica de partículas y/o cuerpos indeformables, siendo que los principios básicos de mecánica fueron originalmente establecidos con este enfoque. En el estudio del movimiento de fluídos, por el contrario, el enfoque Euleriano es frecuentemente más conveniente.

Por ejemplo, la segunda ley de Newton (el vector aceleración de una partícula es directamente proporcional a la resultante de todos los vectores fuerza que actúan sobre ella, siendo su masa la constante de proporcionalidad) se refiere a las fuerzas que actúan sobre una misma partícula al moverse de un punto a otro (enfoque Lagrangiano) y no a las fuerzas que actúan en una localización fija afectando a la partícula que instantaneamente se encuentra en dicha posición (enfoque Euleriano).

Puesto que en nuestro estudio, utilizaremos principios obtenidos con el enfoque Lagrangiano, como la segunda ley de Newton, y tendremos que aplicarlos en el enfoque Euleriano, requerimos de una herramienta que los relacione. Esta herramienta es la derivada total o derivada material que se define como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{q} \circ \vec{\nabla}) \qquad \text{(II-1)}$$

donde el operador D/Dt se refiere al cambio total de la propiedad (sobre la que opera) en el tiempo, mientras los operadores $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ se refieren, como derivadas parciales que son, solo al cambio con respecto a *t*, *x* *y* o *z* respectivamente. Imagine que la partícula sobre la que se esta operando esta inmersa en un campo de alguna propiedad cualquiera (presión, densidad, temperatura, etc.) La interpretación física de esto es que el cambio total de esta propiedad asociada a una partícula en su movimiento, se debe al cambio temporal de esta propiedad en el campo como un todo y a que la partícula se mueve durante este Δt infinitesimal a otra posición en el campo que tiene valores diferentes de esta propiedad. Nótese que el primer miembro de la ecuación es adecuado en un enfoque Lagrangiano pues se refiere a la partícula en sí, mientras que los demás miembros equivalentes son adecuados en un enfoque Euleriano puesto que se refieren al *campo* de dicha propiedad. El producto punto en el último término de la ec.II-1 debe interpretarse simbolicamente como un operador, ya que sin un operando dado, no esta definido. Nótese también que el campo de velocidades esta intimamente ligado a la *derivada total o material* puesto que define como se mueve la partícula en el Δt infinitesimal. Dicho campo de velocidad se define vectorialmente como

$$\vec{q} = (u,v,w) = u\,\hat{i} + v\,\hat{j} + w\,\hat{k} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k} \qquad \text{(II-2)}$$

donde *u*, *v* y *w* son las componentes del vector velocidad en las direcciones *x*, *y* y *z* definidas con sus vectores unitarios i, j, k. Por conveniencia, más adelante se utilizará la nomeclatura $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$. El operador vectorial diferencial ∇ se utilizará también para abreviar, siendo

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} , \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \qquad \text{(II-3)}$$

II.1.2 Conservación de masa (sin fuentes o sumideros)

El principio de conservación de masa establece que en un volúmen de control dado el incremento en la masa almacenada en él es igual a la masa que ingresa menos la que egresa a través de sus fronteras. Matemáticamente esto se manifiesta como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\vec{\nabla} \circ \vec{q} \right) = 0 \qquad \textbf{(II-4)}$$

donde ρ es la densidad del fluído y siguiendo la definición de la derivada total o material en la ec.II-1,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \qquad \text{(II-5)}$$

Para fluído incompresible ($\partial\rho/\partial t=0$) y homogéneo ($\partial\rho/\partial x = \partial\rho/\partial y = \partial\rho/\partial z = 0$) se tiene que ρ se mantiene constante, reduciendose la ec.II-4 a una declaración de continuidad

$$\vec{\nabla} \circ \vec{q} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(II-6)}$$

II.1.3 Conservación de momentum

La segunda ley de Newton establece vectorialmente que el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula (o cuerpo rígido) por unidad de tiempo es igual a la resultante vectorial de las fuerzas que actúan sobre ella, es decir

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} = \frac{D(m \vec{q})}{Dt} \qquad \text{(II-7)}$$

siendo esta expresión eminentemente Lagrangiana, donde el vector *F* representa las fuerzas actuando sobre la partícula (o cuerpo rígido), *m* la masa de la misma y el vector *a* la aceleración que sufre la misma. En el contexto de un fluído esto se puede expresar como

$$\Sigma \vec{F} = \frac{D\,(\delta m\ q)}{Dt} = \frac{D(\rho q)}{Dt}\,\delta\forall \qquad \text{(II-8)}$$

donde $\delta m = \rho\ \delta\forall$ se interpreta como la masa de un pequeño *paquete* de fluído de volúmen $\delta\forall$ constante.

Las fuerzas, en el miembro izquierdo puden ser de dos tipos

$$\text{fuerzas de cuerpo} \quad \begin{cases} \text{gravedad} \\ \text{Coriolis} \end{cases}$$

$$\text{fuerzas de superficie} \quad \begin{cases} \text{normales} \\ \text{tangenciales} \end{cases}$$

Aunque la fuerza de cuerpo más evidente es la de gravedad ejercida por la Tierra misma, algunos problemas de hidráulica marítima requieren considerar también tanto fuerzas de atracción gravitacional por otros cuerpos celestes (usualmente sólo la Luna y el Sol) como fuerzas que provienen del hecho de que la Tierra se encuentra girando sobre su propio eje (efecto o fuerza de Coriolis[1]). Ejemplos de estos problemas son los de marea astronómica o de marea de tormenta.

Para fluído incompresible y homogéneo la ec.II-8 se puede expresar como

---

[1] La fuerza de Coriolis es una fuerza aparente que explica la desviación de un cuerpo en movimiento hacia la derecha (o izquierda) de su trayectoria en el hemisferio Norte (hemsiferio Sur) de la Tierra.

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = - \vec{\nabla} p + \rho \vec{G} + \vec{T} \qquad \textbf{(II-9)}$$

donde el vector G representa las fuerzas de cuerpo que para el estudio de fenómenos de una escala como el de las ondas con periodos de entre uno y 30 segundos incluye exclusivamente a la gravedad (terrestre)

$$\vec{G} = \begin{Bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix} \qquad \text{(II-10)}$$

que implica una orientación de ejes con z vertical positivo hacia arriba (o en otra escala, radial desde el centro de la Tierra) con x,y horizontales (o tangenciales a la superficie de la Tierra). En una aplicación que requiriera considerar además la fuerza de Coriolis las componentes G_x y G_y adquirirían valores de fv y $-fu$ respectivamente, donde el parámetro de Coriolis, f, se define como

$$f = 2\, \omega_T \operatorname{sen} \phi \qquad \text{(II-11)}$$

donde ω_T es la velocidad angular de rotación de la Tierra (2π/24hrs) y ϕ es la latitud del punto en estudio.

El vector T en la ec.II-9 representa las fuerzas de superficie tangenciales

$$\vec{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II-12)}$$

con τ siendo el esfuerzo tangencial y sus subíndices indicando la combinación de su direccion y la orientación de la cara del volúmen de control sobre la que actúan.

Las fuerzas de superficie normales son las de presión y estan representadas por el operador diferencial ∇ operando sobre el campo de presiones $p(x,y,z,t)$.

II.1.4 Ecuaciones de Navier-Stokes (momentum para fluído Newtoniano)

Se llama fluído Newtoniano a aquel en el que el esfuerzo tangencial y el gradiente de velocidades en dirección normal al plano en el que actúa dicho esfuerzo tangencial, están relacionados linealmente. Esta situación idealizada es, sin embargo, una buena aproximación para los fluídos de interés en el tema que nos atañe, agua y aire. En este caso el esfuerzo tangencial puede expresarse simplemente en términos del campo de velocidades como

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad i,j=1,2,3 \qquad \text{(II-13)}$$

donde los valores de los subíndices, 1, 2 y 3, representan las direcciones x, y y z respectivamente. Bajo estas condiciones la ec.II-9 se puede expresar como

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{G} + \mu \nabla^2 \vec{q} \qquad \textbf{(II-14)}$$

donde el operador Laplaciano se define como

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} = | \vec{\nabla} |^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(II-15)}$$

La ec.II-14, cuando se refiere a los valores instantáneos de las variables indicadas, es válida para cualquier condición de flujo, pero si por el contrario, como es usual en aplicaciones en hidráulica, se refiere a los valores medios de las mismas. entonces es válida solo para flujo laminar.

II.1.5 Ecuaciones de Reynolds (flujo turbulento)

Dividamos a cada variable en las ecuaciones de Navier-Stokes (ec.II-14) en su valor medio, indicado con una barra, y en una fluctuación turbulenta alrededor de este, indicado con una *prima*

$$\alpha = \overline{\alpha} + \alpha' \tag{II-16}$$

con α representando cualquiera de estas variables. Al promediar las ecuaciones en el tiempo los productos de medias o productos de fluctuaciones sobreviven pero los productos cruzados de medias con fluctuaciones se nulifican, o sea

$$\overline{(\overline{\alpha}\ \overline{\beta})} = \overline{\alpha}\ \overline{\beta} = 0 \tag{II-17a}$$

$$\overline{(\ \alpha'\beta'\ )} \neq 0 \tag{II-17b}$$

$$\overline{(\overline{\alpha}\ \beta'\ )} = \overline{\alpha}\ \overline{\beta}' = (\overline{\alpha})(0) \equiv 0 \tag{II-17c}$$

donde nuevamente β representa cualquiera de las variables. La sobre-barra indica el operador promedio en el tiempo definido como

$$\overline{(\ )} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (\quad)\, dt \tag{II-18}$$

con t_0 siendo cualquier tiempo inicial y T el intervalo de tiempo de promediación. La fluctuación, ( )', es la diferencia del valor instantáneo con la media y por definición la media de una fluctuación es nula. Efectuando dicha operación sobre la ec.II-14 obtenemos

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = - \vec{\nabla}p + \rho \vec{G} + \vec{T} \qquad \text{(II-19)}$$

pero ahora todas las variables se refieren al valor medio (la sobre-barra no se incluirá por brevedad notacional) y

$$\tau_{ij} = -\rho\overline{u'_i u'_j} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad \text{(II-20)}$$

incluye una aportación por fluctuaciones turbulentas.

Con la teoría de la longitud de mezclado de Prandtl

$$\tau_{ij} = \rho \left(\varepsilon_{ij} + \nu \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad \text{(II-21)}$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluído $(=\mu/\rho)$ y ε es la *viscosidad vorticosa*.

II.1.6 **Ecuaciones de Euler para fluído no viscoso** $(\varepsilon_{ij} + \nu \equiv 0)$

Si asumimos una viscosidad despreciable en el fluído, la ecuación de momentum se reduce a

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = - \vec{\nabla}p + \rho\vec{G} \qquad \textbf{(II-22)}$$

Es importante hacer notar el cambio que se introduce en el comportamiento matemático fundamental de la ecuación de momentum el hacer esta suposición; mientras la ecuación de Navier-Stokes (ec.II-14) y la de Reynolds (ec.II-19) son de 2^{o} orden (tienen derivadas de orden 2) y por lo tanto deben satisfacer 2 condiciones de frontera, la ecuación de Euler (ec.II-22) es de 1^{er} orden y solo puede satisfacer una condición de frontera.

Esto produce que al idealizar el flujo en esta forma, no podemos satisfacer la muy conocida condición de no deslizamiento (o sea que una partícula de fluído en contacto con una frontera sólida debe tener la misma velocidad tangencial que la frontera) y por lo tanto solo es razonablemente válida fuera de la *capa límite*.

Si además nos limitamos a un caso con fuerzas de cuerpo, distintas a la de gravedad terrestre, despreciables (ver ec. II-10), se tiene

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = - \vec{\nabla}p - \rho g \hat{k} \qquad \text{(II-23)}$$

En resumen las ecuaciones gobernantes en coordenadas cartesianas, para estas últimas condiciones, son:

continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(II-24)}$$

momentum en x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad \textbf{(II-25a)}$$

momentum en y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad \textbf{(II-25b)}$$

momentum en z

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \qquad \textbf{(II-25c)}$$

En fenómenos de gran escala, en los cuales el efecto de Coriolis no puede ser despreciado, será necesario agregar al miembro derecho de las ecs.II-25a y II-25b los términos fv y $-fu$ respectivamente. Para casos que requieran considerar los cambios del nivel del mar por mareas astronómicas, términos adicionales son necesarios en los miembros derechos de las ecs.II-25.

II.2 USO DEL POTENCIAL DE VELOCIDADES.

Para simplificar las ecuaciones anteriores se introduce la idea de un potencial de velocidades ϕ, que es una función escalar que cumple con

$$\vec{q} = \vec{\nabla}\phi \qquad \text{o} \qquad (u,v,w) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad \text{(II-26)}$$

o sea que una vez conocida la función escalar ϕ, se tiene definido totalmente el campo vectorial de velocidad.

Matematicamente esto implica que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \text{(II-27)}$$

o sea que el potencial de velocidades existe solo para flujo <u>irrotacional</u> ($\overline{\nabla} \times \overline{q} = 0$).

Se puede demostrar que cuando **fuerzas conservativas**[2] actúan sobre **flujo inicialmente irrotacional**, el flujo **permanece irrotacional.**

Por lo tanto, la introducción de la suposición de la existencia del potencial de velocidad implica

a) flujo inicialmente irrotacional

b) fuerzas conservativas

suposiciones no muy exactas en la realidad, pero que se utilizan porque los resultados obtenidos describen bien variados fenómenos naturales.

---

[2] Las fuerzas conservativas son aquellas cuyo valor en el dominio depende unicamente de la posición y son independientes de la trayectoria seguida para llegar a dicha posición. Las fuerzas de presión, atracción gravitacional y Coriolis son conservativas.

La irrotacionalidad implica un cierto carácter en la deformación de un elemento de fluído, misma que se esquematiza en la fig.II.1. Observe que el flujo no puede ser irrotacional en la vecindad directa de una frontera inmóvil, puesto que esto implicaría la formación de un vacío al deformarse el elemento originalmente en contacto con ella.

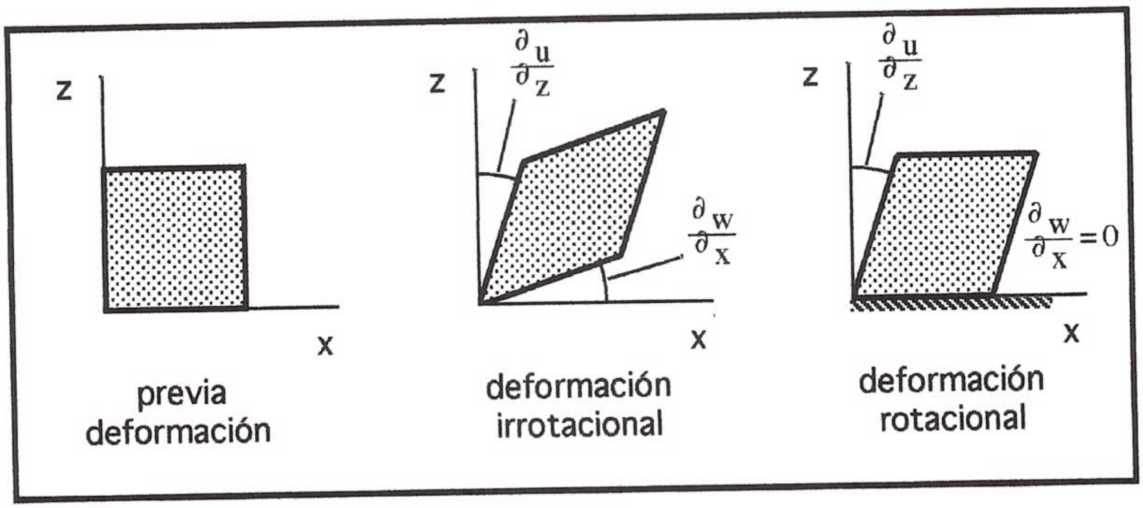

Fig. II.1. Deformación bidimensional de una *partícula* de fluído (sin deformación en la dirección y)

II.2.1 Ecuación de Laplace

Al introducir el potencial de velocidades ϕ, ec.II-26, en la ecuación de continuidad, ec.II-24, se obtiene la muy conocida ecuación de Laplace

$$\vec{\nabla} \circ \vec{q} = \vec{\nabla} \circ (\vec{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(II-28)}$$

II.2.2 Ecuacion de Bernoulli

Introduciendo el potencial de velocidades ϕ, en las ecuación de Euler en dirección *x*, ec.II-25a, se obtiene

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{p}{\rho}\right] = 0 \qquad \text{(II-29a)}$$

e integrando con respecto a *x*

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = f_1(y,z,t) \qquad \text{(II-30a)}$$

De igual manera, al introducir ϕ en la ecuación de Euler en dirección y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{p}{\rho}\right] = 0 \qquad \text{(II-29b)}$$

e integrando en y

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = f_2(x,z,t) \qquad \text{(II-30b)}$$

Introduciendo ϕ en la ecuación de Euler, dirección *z*

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{p}{\rho}\right] = -\,g \qquad \text{(II-29c)}$$

Integrando en *z*

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = -gz + f_3(x,z,t) \qquad \text{(II-30c)}$$

Las 3 funciones f_1, f_2 y f_3 hacen las veces de la constante de integración, pero puesto que se trata de integración con respecto unicamente a *x*, y o *z* respectivamente (la operación inversa a una derivada parcial), dichas *constantes* deben serlo solo con respecto a