la variable de integración.

Observe que el miembro izquierdo de las 3 ecs. II-30 es igual, o sea

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = \begin{cases} f_1(y,z,t) \\ f_2(x,z,t) \\ -gz + f_3(x,y,t) \end{cases} \tag{II-31}$$

Puesto que los 3 miembros derechos de la ec. II-31 son iguales al miembro izquierdo, tienen que ser iguales entre sí

$$f_1(y,z,t) = f_2(x,z,t) = -gz + f_3(x,y,t) \tag{II-32}$$

De la primera de estas 3 igualdades se puede deducir que f_1 no dependerá de y puesto que f_2 no depende de y, que f_2 no dependerá de x puesto que f_1 no lo hace, y por similares razones que f_3 no dependerá ni de x ni de y. O sea la ec. II-32 implica que

$$f_1(z,t) = f_2(z,t) = -gz + f_3(t) \tag{II-33}$$

lo que implica a su vez que cualquiera de los 3 miembros de la ec. II-33 puede ser expresado simplemente como $[-gz + f(t)]$, o sea que la *constante* de integración resulta depender solo del tiempo. Con esto en mente, obtenemos la ecuación generalizada de Bernoulli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = -gz + f(t) \tag{II-34}$$

Note que excepto por la dependencia con t la ec. II-34 es igual a la ecuación de Bernoulli tradicional de hidráulica.

Ahora, demostremos que la función $f(t)$ carece de importancia y que puede inclusive adquirir cualquier valor constante. Si hubiésemos definido otro potencial como

$$\phi^{*} = \phi - F(t) \qquad \text{donde} \qquad F(t) = \int f(t)\, dt \qquad \text{(II-35)}$$

lo que podemos hacer sin preocupación puesto que este nuevo potencial sigue coumpliendo con la definición original

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \equiv \frac{\partial\phi^*}{\partial x} \;; \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \equiv \frac{\partial\phi^*}{\partial y} \;; \qquad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \equiv \frac{\partial\phi^*}{\partial z} \qquad \text{(II-36)}$$

obtenemos

$$\frac{\partial\phi^{*}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi^{*})^2 + \frac{p}{\rho} = -gz + C \qquad \text{(II-37)}$$

y puesto que ϕ^{*} es tan bueno como ϕ, podemos intercambiar nomeclatura y aseverar que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = -gz + C \qquad \textbf{(II-38)}$$

La constante C puede inclusive hacerse 0 escogiendo un marco de referencia con el nivel z=0 adecuado.

II.3. CONCLUSIONES SOBRE ECUACIONES GOBERNANTES EN EL DOMINIO

La introducción del concepto de potencial de velocidad nos ha permitido el pasar de las 4 ecuaciones escalares gobernantes, ecs. II.24 y II.25a,b,c, con incógnitas u,v,w y p, a unicamente 2 ecuaciones escalares, ecs. II-28 y II-38, con incógnitas ϕ y p, lo que ciertamente simplifica el problema.

Resumiendo, hemos llegado a concluir que bajo las suposiciones simplificatorias hechas, se tienen que cumplir 2 ecuaciones gobernantes en el interior del dominio, la ecuación de Laplace (ec.II-28) que es puramente cinemática (en ella no intervienen variables dinámicas, sino solamente el campo de velocidades) y la ecuación de Bernoulli (ec.II-38) que tiene carácter dinámico.

Es importante enfatizar que, aún cuando ambas ecuaciones tienen que cumplirse en el dominio, el problema matemático que presentan no es el de la solución simultánea de ambas, puesto que se puede solucionar la ecuación de Laplace inicialmente, obteniendo ϕ y con esto el campo de velocidades. Conociendo este, se puede resolver la ecuación de Bernoulli. Fisicamente esto indica que el campo de presiones se ajusta al campo de velocidades obligado por la ecuación de Laplace.

Hasta aquí el problema matemático a resolver aparece como relativamente simple, pues la ecuación de Laplace es *lineal*, y una vez conocido ϕ, la ecuación de Bernoulli también es *lineal* en p.

II.4 CONDICIONES DE FRONTERA.

Para establecer el problema a resolver de una manera completa, es necesario atacar ahora el tema de las condiciones de frontera, o sea obtener las condiciones que deben ser satisfechas por las soluciones en los límites del dominio del problema. Como veremos mas adelante, en el contexto de ondas superficiales, las condiciones de frontera son las que proporcionan características especialmente interesantes al problema (además de la dificultad en su solución).

II.4.1 **Condición cinemática sobre una frontera (impermeable)**

Una condición cinemática se refiere a aquella que el campo de velocidades debe cumplir en la frontera. Ya comentamos que bajo la suposición simplificatoria de flujo irrotacional, la condición de *no* *deslizamiento* no puede ser satisfecha. Esta condición esta asociada a la velocidad tangencial a la frontera de la que se trata. Sin embargo, la velocidad normal a dicha frontera debe ser tal que *las particulas sobre la frontera, permanecen en la frontera*. Ni siquiera una partícula aislada puede alejarse de la frontera, porque como el campo de velocidades es continuo (o sea no tiene saltos bruscos) de tener una partícula cualquiera una velocidad finita normal a la frontera (no importando que tan pequeña) las partículas vecinas a ella, también tendrían una velocidad normal finita, lo que implica que se formaría un vacío, contradiciendo el enfoque de contínuo tradicional en mecánica de fluídos. Nótese que el permanecer sobre la frontera no implica que no pueda *deslizarse* sobre ella.

Sea la ecuación que define una superficie de frontera

$$S\ (x,y,z,t) = 0 \qquad \text{(II-39)}$$

o sea que una partícula sobre ella cumple

$$S\ (\ x_p(t),\ y_p(t),\ z_p(t),\ t\ ) = 0 \qquad \text{(II-40)}$$

para todo t, donde el subíndice p se refiere a la partícula. Puesto que la partícula debe seguir satisfaciendo la ec.II-40, el cambio total de esta *propiedad* en el tiempo es nulo; matematicamente

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad \text{sobre } S = 0 \qquad \text{(II-41)}$$

Introduciendo la definición de ϕ, ec.II-26,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi \circ \vec{\nabla}S = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi \circ (\hat{n}\ |\nabla S|) =$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + |\vec{\nabla}S|\ \vec{\nabla}\phi \circ \hat{n} = 0 \qquad \text{(II-42)}$$

donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la frontera. Como

$$\vec{\nabla}\phi \circ \hat{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \qquad \text{(derivada direccional)} \qquad \text{(II-43)}$$

entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{\dfrac{\partial S}{\partial t}}{|\vec{\nabla} S|} \qquad \text{sobre} \quad S(x,y,z,t) = 0 \qquad \textbf{(II-44)}$$

expresión que representa matematicamente la condición de frontera impermeable cinemática general. Aunque esta forma puede parecer rebuscada para casos simples como el de fronteras inmóviles alineadas con algún eje coordenado, resulta sumamente útil para condiciones no tan obvias, como veremos más adelante. Para el caso especial de una frontera inmóvil

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{sobre } S(x,y,z,t) = 0 \qquad \textbf{(II-45)}$$

puesto que la inmovilidad implica $\partial S/\partial t = 0$. Esta última expresión implica que la componente de velocidad normal a la frontera es nula.

II.4.2 Condición cinemática sobre la superficie libre

Aunque no es inmediatamente obvio, la superficie libre de un líquido (o sea la interfase líquido-gas) es una frontera impermeable, puesto que a través de ella no existe intercambio de partículas entre el líquido y el gas (al menos en el contexto macroscópico continuo). En el caso que nos ocupa, la superficie libre se puede definir por

$$z = \eta(x,y,t) \qquad \text{(II-46)}$$

donde η define la posición vertical de la superficie libre, hecho esquematizado en la fig.II.2.

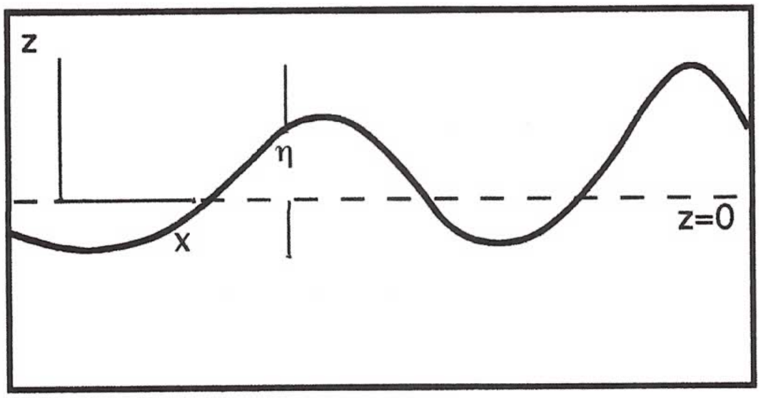

Fig.II.2. Localización de la superficie libre $z = \eta(x,y,t)$.

Esto se puede colocar en la forma de la ec.II-39 como

$$S = \eta(x,y,t) - z = 0 \tag{II-47}$$

La aplicación directa de la ec.II-41 sobre la ec.II-47 (considerando la ec.II-26) produce

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{No lineal}} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{\text{No lineal}} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{sobre } z = \eta(x,y,t) \tag{II-48}$$

ecuación que establece, en el enfoque Euleriano, que las partículas originalmente sobre la superficie, permanecen sobre ella. Como ya habíamos comentado, esta condición de frontera introduce una no linealidad, indicada en los términos que contienen el producto de derivadas de 2 incógnitas, ϕ y η. Una no linealidad adicional se presenta al aplicarse esta condición de frontera en una localización no conocida a priori. Esta no linealidad en la condición de frontera introduce una apreciable complicación en la solución del problema, y eventualmente nos obligará a buscar soluciones que aún siendo analíticas, no serán exactas, sino aproximaciones al problema real.

II.4.3 Condición dinámica sobre la superficie libre

La ecuación de Bernoulli (ec.II-38) en $z = \eta\ (x,y,t)$ es

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla\phi)^2 - \rho g \eta + C \quad \text{sobre } z = \eta\ (x,y,t) \qquad \text{(II-49)}$$

La presión apenas debajo de la superficie (despreciando la tensión superficial) es igual a la atmosférica $p = p_a$ y escogiendo la constante arbitraria $C = p_a$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + g\eta = 0 \quad \text{sobre } z = \eta\ (x,y,t) \qquad \textbf{(II-50)}$$

ecuación diferencial que se reconoce de inmediato como no lineal.

II.4.4 Forma alternativa de la condición de frontera en la superficie libre

Si la presión sobre la superficie libre p_a no cambia ni en el tiempo ni en el espacio, lo que es razonable en la escala de espacio y tiempo asociada con oleaje generado por viento

$$\frac{Dp}{Dt} = 0 \qquad \text{(II-51)}$$

lo que implica, considerando la ec.II-49, que

$$\frac{D}{Dt} \left(- \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla\phi)^2 - \rho g \eta \right) = 0 \qquad \text{(II-52)}$$

o sea

$$\frac{D\eta}{Dt} = -\frac{1}{g}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) \qquad \text{(II-53)}$$

pero además por la condición cinemática, ec.II-41, sobre la superficie libre, ec.II-47

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \longrightarrow \frac{D\eta}{Dt} = \frac{Dz}{Dt} \qquad \text{(II-54)}$$

y operando sobre el término derecho,

$$\frac{Dz}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \text{(II-55)}$$

porque las coordenadas x, y y z son independientes entre sí, por lo que concluímos que

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \text{(II-56)}$$

Combinando las ecs.II-53 y II-56 obtenemos la condición en la superficie libre exclusivamente en función de ϕ

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{sobre } z = \eta\ (x,y,t) \qquad \textbf{(II-57)}$$

II.4.5 Condiciones de frontera al infinito

Examinemos las condiciones de frontera cuando la distancia horizontal a la zona en estudio tiende a infinito, ver fig.II.3.

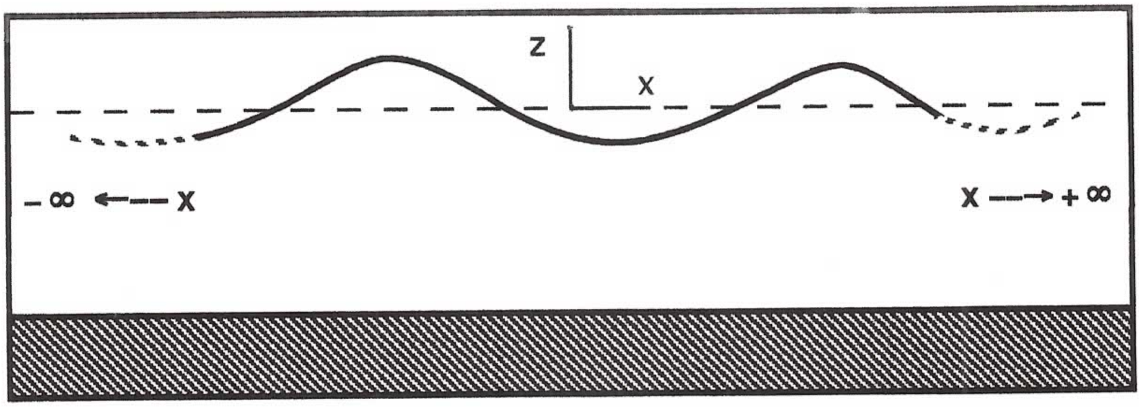

Fig. II.3. Condiciones de frontera al infinito (en direcciones horizontales **x** y **y**).

Al infinito es necesario que

a) la solución sea acotada (no crezca indefinidamente)

Además, es conveniente en muchos casos establecer la

b) condición de radiación

que es el nombre acostumbrado para establecer simplemente que el oleaje avanza hacia el infinito, pero no viene de él.

Estas 2 condiciones serán clarificadas durante su utilización concreta mas adelante.

II.4.6 Ejemplo #1

Consideremos un flujo bidimensional (uniforme en y) como se muestra en la fig.II.4

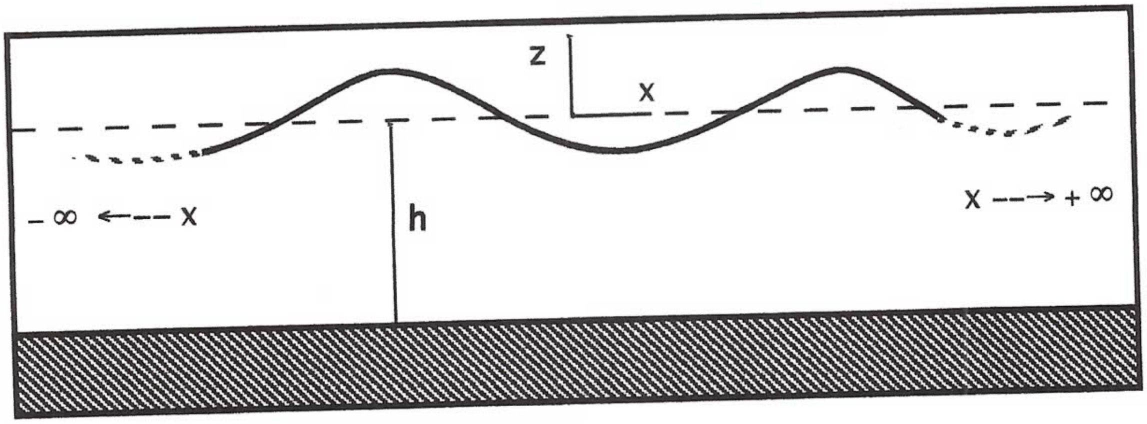

Fig. II.4. Esquema de definición del dominio en el Ejemplo #1 (uniforme en y, fondo horizontal h=constante).

De acuerdo a las secciones anteriores las ecuaciones que se deben satisfacer son

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad -h < z < \eta(x,t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad z = -h$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad z = \eta(x,t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right] + g\,\eta = 0 \qquad z = \eta\,(x,t)$$

En orden descendente las ecuaciones son la de Laplace (ecuación gobernante en el dominio), la condición (cinemática) de frontera en el fondo, la condición cinemática de frontera en la superficie libre y la condición dinámica en la superficie libre. Aún este, el más simple de los problemas, es no lineal.

II.4.7 Ejemplo #2

Consideremos ahora un problema similar pero limitado lateralmente en la vecindad de x = 0 por una pared móvil (un generador de oleaje por ejemplo) con movimiento horizontal arbitrario definido por $x = \xi(t)$, tal como se esquematiza en la fig. II-5.

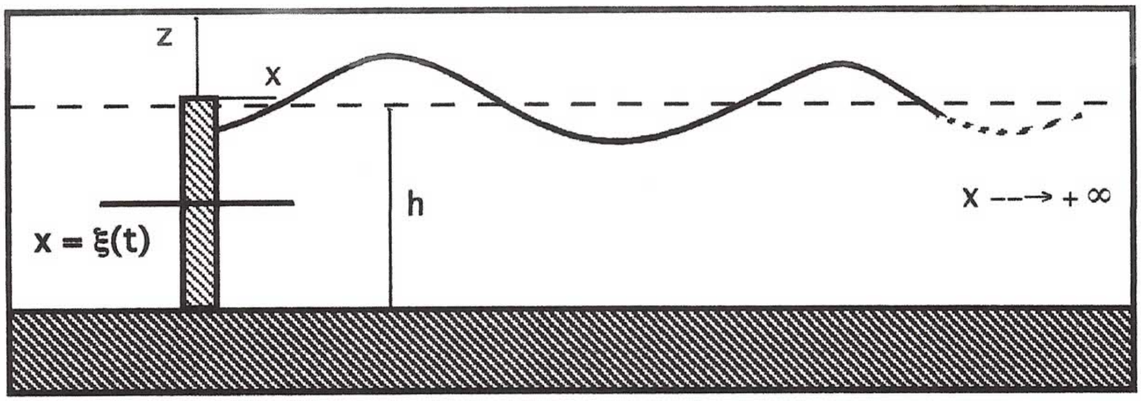

Fig. II.5. Esquema de definición del dominio en el Ejemplo #2 (la posición instantánea del pistón es $x = \xi(t)$).

Las ecuaciones gobernantes en este caso son

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad -h < z < \eta(x,t); \quad x \geq \xi(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad z = -h; \quad x \geq \xi(t)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad z = \eta(x,t); \quad x \geq \xi(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] + g\eta \qquad z = \eta(x,t); \quad x \geq \xi(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \qquad x = \xi(t); \quad -h < z < \eta(x,t)$$

Las primeras 4 ecuaciones son similares a las del Ejemplo #1 pero restringidas a un dominio seminfinito en x. La última es la condición de frontera cinemática en el generador de pistón, estableciendo que sobre este, la velocidad del fluído normal a su superficie, es igual a la velocidad del pistón. Esta se obtiene, en este caso no inmediatamente obvio, de aplicar la ec.II-44 a la superficie del pistón definida por

$$S(x,t) = x - \xi(t) = 0$$

utilizando como resultados intermedios

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$n = x \longrightarrow \vec{\nabla} S = - \frac{\partial x}{\partial x} \hat{i} = - \hat{i} \longrightarrow |\vec{\nabla} S| = 1$$

por lo tanto $$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial S}{\partial t}}{|\vec{\nabla} s|} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$