III. TEORIA LINEAL DE OLEAJE

En este capítulo buscaremos linealizar las ecuaciones gobernantes vistas en el capítulo anterior, para poder encontrar una solución analítica a las mismas para el caso de ondas progresivas de amplitud constante sobre fondo horizontal. Exploraremos las condiciones en las que esta solución a las ecuaciones lineales es una buena aproximación a la realidad y examinaremos con cierto detenimiento la descripción que ésta nos hace de los campos cinemáticos y dinámicos. Además plantearemos una de las principales ventajas de mantenernos dentro del contexto lineal: la posibilidad de generar nuevas soluciones a través de la superposición de soluciones ya obtenidas y aplicaremos el mismo a tres casos de gran utilidad: ondas irregulares aleatorias, trenes de olas de amplitud modulada y ondas estacionarias.

III.1 SUPOSICIONES Y LINEALIZACION DE ECUACIONES GOBERNANTES.

Repasemos las suposiciones ya implícitas en las ecuaciones gobernantes obtenidas en el capítulo anterior. Después procederemos a hacer nuevas suposiciones simplificatorias que nos permitan obtener soluciones analíticas.

III.1.1 **Suposiciones implícitas en las ecuaciones gobernantes.**

Las ecuaciones de Euler (ecs. II-24 y II-25) son válidas solo para:

a) Fluído ideal (no viscoso)

Además, la introducción del potencial de velocidades para llegar a las ecuaciones de Laplace (ec.II-28) y la ecuación generalizada de Bernoulli (ec.II-38), implica:

b) Flujo irrotacional

c) Fuerzas conservativas

Limitándonos, por el momento, a ondas gravitacionales generadas originalmente por vientos (ver secc.I.6), o sea a ondas cuya escala de variación en el tiempo es entre 1 y 30 segundos, tenemos:

d) Fuerzas de Coriolis y tensión superficial despreciables

III.1.2 Suposiciones adicionales para simplificar el problema.

Ahora, con la justificación de que el hacerlo nos llevará a soluciones no solo simples y manejables, sino además útiles en la descripción de múltiples casos de la realidad, haremos las siguientes suposiciones adicionales:

e) Olas periódicas (período constante)

esto es, la perturbación en la posición de la superficie libre (¡esto es una ola u onda superficial!) vista en una localización fija, se repetirá en forma idéntica cada determinado intervalo de tiempo.

f) Profundidad constante (fondo horizontal)

g) Olas bidimensionales (uniformes en y)

esto es el movimiento de las partículas de agua bajo la ola se limitará a su plano x-z original, siendo este uniforme a través de y.

En secciones posteriores veremos casos en los que estas últimas 3 suposiciones se relajan, pero por el momento por simplicidad las adoptaremos.

III.1.3 Linealización de condiciones de frontera en la superficie libre.

La principal dificultad para la obtención de una solución analítica a las ecuaciones gobernantes planteadas es la no linealidad de las condiciones de frontera en la superficie libre, tanto la cinemática:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad z = \eta(x,t) \qquad \text{(III-1)}$$

como la dinámica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] + g\eta = 0 \qquad z = \eta(x,t) \qquad \text{(III-2)}$$

Para poder linealizarlas, haremos una simplificación adicional:

h) olas de pequeña amplitud

pero para poder hacerlo, antes necesitamos el concepto de comparación de variables en cuanto a su orden de magnitud.

Se dice que dos cantidades, *a* y *b*, son de igual orden de magnitud si

$$\frac{1}{10} \leq \frac{a}{b} \leq 10 \qquad \text{(III-3)}$$

o sea si no difieren por mas de un factor de 10. Aunque este factor es arbitrario, y bien podría ser 2 o 5 en lugar de 10, la definición en la ec.III-3 servirá para nuestros propósitos. Cuando esta *igualdad en orden de magnitud* se cumple, a manera de nomeclatura abreviada se dice que

$$a = \mathcal{O}\,(b) \qquad o \qquad b = \mathcal{O}\,(a) \qquad \text{(III-4)}$$

que debe interpretarse como *a es del orden de magnitud de b* (o viceversa), lo que se indica con la letra O estilizada, $\mathcal{O}$. Nótese que esto puede interpretarse como *aproximadamente igual* pero de una manera muy liberal, puesto que *a* puede ser bastante mayor o menor que *b* y aún así ser del mismo orden de magnitud. Cuando se realiza una comparación en *orden de magnitud* para cantidades armónicas (que varían en forma periódica sinusoidal) la comparación se hace para las amplitudes de esta variación, puesto que en diversas etapas de la misma la variable puede adquirir valores que van desde su amplitud con signo (+) hasta su amplitud con signo (-) pasándo por cero. Por otro lado de usarse una desigualdad en el contexto de ordenes de magnitud, por ejemplo $\mathcal{O}(a) > \mathcal{O}(b)$, se debe interpretar que en este caso *a es significativamente mayor que b*.

Una ola (o cierta condición de oleaje) se puede caracterizar en forma sencilla por su *altura* H, la *longitud de onda* L, *su periódo T y la profundidad* h del agua sobre la que viaja (ver Fig.III.1). La longitud de onda es la distancia de repetición en el espacio así como el periodo lo es en el tiempo. De esta forma se puede establecer que las magnitudes características en un problema de este tipo son:

- en la vertical: la profundidad h
- en la coordenada x: la longitud de onda L
- en la coordenada t: el periodo T
- en el desplazamiento de la superficie libre: la altura de ola H.

y en el sentido de órdenes de magnitud se puede decir que, el desplazamiento de la superficie libre de su posición de equilibrio, $\eta(x,t)$, sus derivadas y la coordenada vertical cumplen

$$\eta = \mathcal{O}(H) \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right) \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \mathcal{O}\left(\frac{H}{L}\right) \qquad z = \mathcal{O}(h) \qquad \text{(III-4)}$$

puesto que η varía entre 0 y H/2, y z va de $+\eta$ a $-h$ en el dominio de interés. Nótese que H/L representa una pendiente promedio de la superficie libre, por lo que representa adecuadamente el orden de magnitud de la pendiente local $\partial\eta/\partial x$; en forma análoga H/T representa el orden de magnitud de $\partial\eta/\partial t$.

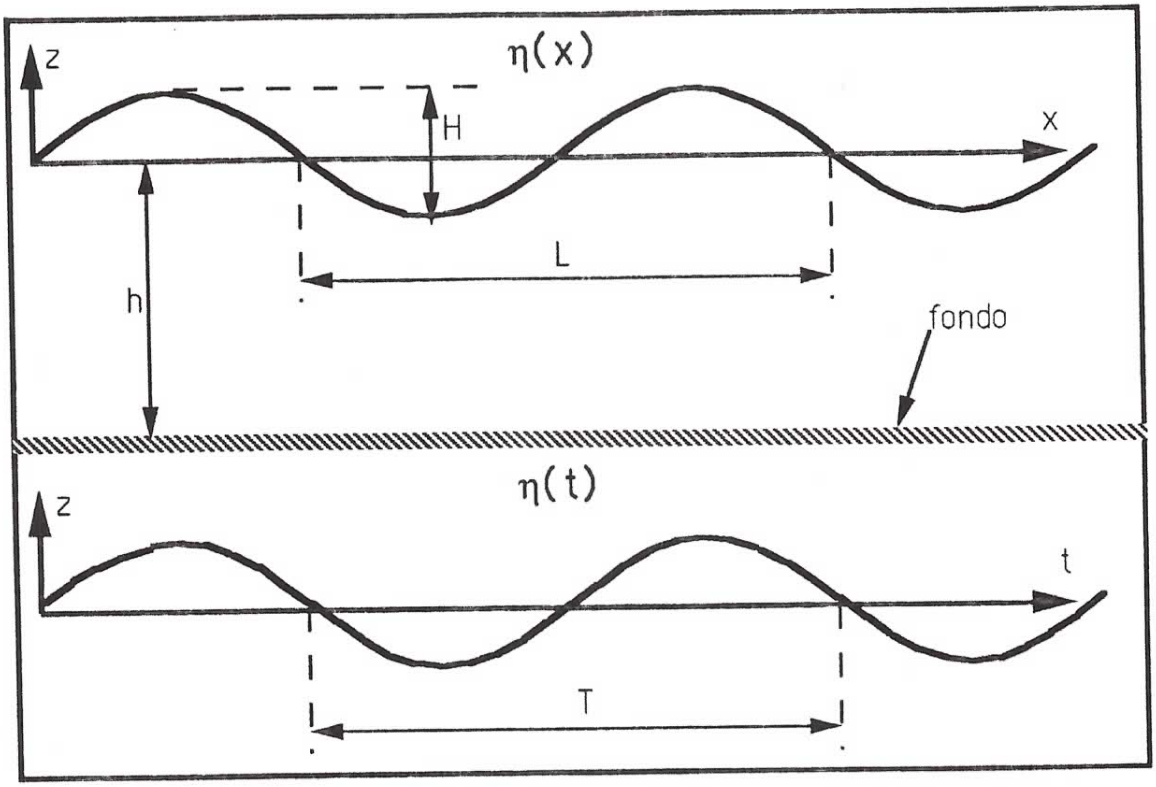

Fig.III.1. Diagrama de definición de magnitudes características de oleaje.

Al observar ondas de superficie en laboratorio se puede comprobar que las *partículas* de fluído bajo el paso de la ola no se transladan con ella sino que sufren tan solo un desplazamiento limitado en un circuito (casi) cerrado alrededor de su posición de equilibrio original[1] y que cerca de la superficie la distancia entre el centro de la *órbita* y la posición de la partícula es del orden de la altura de ola H. Esto puede observarse esquematicamente en la Fig.III.2 donde se muestra la onda de superficie y la órbita de una partícula cerca de la superficie. Armados con esta evidencia física aseveramos que

---

1

Esto puede parecer inicialmente extraño para el principiante en estudio de oleaje. Sin embargo basta ejemplificar con el caso de una persona que sujeta una cuerda en uno de sus extremos y la sacude. Lo que sucede es que una onda sobre la cuerda se translada a lo largo de ella, pero en este caso es obvio que las partículas de cuerda no se despalazan junto con esta onda a lo largo de la cuerda, sino que sufren tan solo un desplazamiento transversal temporal mientras pasa la onda.

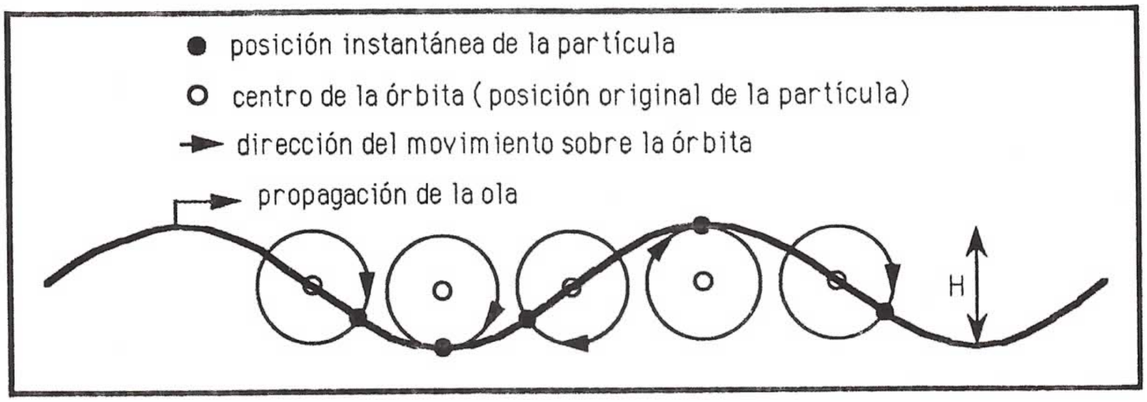

Fig.III.2. Esquema simplificado del movimiento de una partícula cerca de la superficie al pasar una ola

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right) \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right) \tag{III-5}$$

donde la primera igualdad en cada grupo solo nos recuerda la definición del campo de velocidades en función del potencial de velocidad. El orden de magnitud indicado representa una *velocidad típica* como el desplazamiento máximo (de orden H) entre el tiempo de repetición (de orden T).

Suponiendo además que el interés es en condiciones en que la longitud de onda L es del mismo orden que la profundidad, $L = \mathcal{O}(h)$, se tiene que el orden de magnitud del potencial de velocidad es

$$\phi = \mathcal{O}\left(\frac{H\ L}{T}\right) \tag{III-6}$$

que se obtiene de considerar la ec.III-5 (1^{er} grupo) en combinación con que la escala de variación en x es de orden L (o alternativamente del 2^{o} grupo con la variación en z del orden h y por ende de orden L).

Consideremos ahora los órdenes de magnitud de los diferentes términos en la condición cinemática de superficie libre, ec.III-1

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{(III-7)}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right) \qquad \mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right)\left(\frac{H}{L}\right) \qquad \mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right)$$

y para olas con altura H muy reducida con respecto a su longitud

$$\frac{H}{L} \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{O}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) < \mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right) \qquad \text{(III-8)}$$

o sea que el segundo término en la ec.III-7 es mucho menor que los otros dos términos.Los símbolos de desigualdad dobles (<<) en la ec.III-8 deben interpretarse como *mucho menor que* o en el contexto de ódenes de magnitud como de *orden de magnitud menor.* Observe que la aseveración anterior es válida cualquiera que sea la definición de igualdad en ordenes de magnitud, obligando dicha definición solo a que tan pequeño debe ser H/L comparado con el valor 1. Estrictamente en el límite, al hacerse las olas de altura infinitesimal, el segundo miembro desaparece junto con la no linealidad que introduce en la ecuación. Lo pequeño que requiere ser H para que la eliminación del segundo término sea una aproximación razonable es un término relativo a la longitud de onda, o sea no se requiere una altura de ola muy pequeña sino una pendiente promedio H/L (o relación de esbeltez) muy pequeña. Matematicamente se requiere que H << L.

Considerando ahora los órdenes de magnitud de la condición dinámica de superficie libre, ec. III-2

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] + g\eta = 0 \qquad \text{(III-9)}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{HL}{T^2}\right) \qquad \mathcal{O}\left(\frac{1}{2}\,\frac{H^2}{T^2}\right) \qquad \mathcal{O}\left(\frac{1}{2}\,\frac{H^2}{T^2}\right) \qquad \mathcal{O}(gH)$$

Si los términos no lineales fueran muy pequeños, el primer término se balancearía con el último, lo que en orden de magnitud implica

$$\mathcal{O}\left(\frac{HL}{T^2}\right) = \mathcal{O}\left(gH\right) \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{O}\left(L\right) = \mathcal{O}\left(gT^2\right)$$

donde la conclusión sobre el orden de magnitud se obtiene despejando L de la igualdad absoluta (sin considerar los órdenes de magnitud) y recordando que la igualdad obtenida se cumple solo en orden de magnitud. Al introducir esta conclusión en los órdenes de magnitud de los términos no lineales (el 2° y 3° en la ec.III-9) se obtiene

$$\text{términos no lineales} = \mathcal{O}\left(\frac{g}{2}\,\frac{H^2}{L}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{H\,g}{2}\,\frac{H}{L}\right)$$

Apovechando la libertad que nos permite la definición de *orden de magnitud*, despreciaremos el efecto de las constantes (2 y g) en esta discusión y con ello y las dos anteriores conclusiones en cuanto a orden de magnitud reescribimos la ec.III-9 como

$$\underset{\mathcal{O}(H)}{\frac{\partial\phi}{\partial t}} + \frac{1}{2}\left[\underset{\mathcal{O}\left(H\frac{H}{L}\right)}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2} \; \underset{\mathcal{O}\left(H\frac{H}{L}\right)}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}\right] + \underset{\mathcal{O}(H)}{g\eta} = 0 \qquad \text{(III-10)}$$

por lo tanto para H/L << 1 los términos no lineales son mucho menores que los términos lineales.

Concluímos que para H/L << 1 las condiciones de la superficie libre quedan:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad z = \eta(x,t)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \qquad z = \eta(x,t)$$

ó

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{(III-11)}$$

donde la alternativa de la derecha se obtiene de combinar ambas condiciones del lado izquierdo (forma alternativa de la condición de superficie libre, ver secc.II.4.4).

Sin embargo persiste una no linealidad en la ec.III-11, puesto que se aplica en $z=\eta$, que es una de las incógnitas, o sea se aplica en una localización desconocida. Intentemos expandir ϕ en serie de Taylor alrededor del nivel z=0 recordándo que η es la distancia entre dicho nivel y la posición actual de la superficie libre

$$\phi_{z=\eta} = \phi_{z=0} + \eta\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} + \eta^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_{z=0} + \ldots \qquad \text{(III-12)}$$

y en forma similar para los 2 términos de la forma alternativa de la condición de superficie libre (ec.III-11,derecha)

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\eta} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0}}_{\mathcal{O}\left(\frac{HL}{T^3}\right)} + \eta\underbrace{\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial t^2\partial z}\right)_{z=0}}_{\mathcal{O}\left(\frac{HL}{T^3}\frac{H}{h}\right)} + \eta^2\underbrace{\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial t^2\partial z^2}\right)_{z=0}}_{\mathcal{O}\left(\frac{HL}{T^3}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right)} + \ldots \qquad \text{(III-13)}$$

para

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\eta} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} + \eta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_{z=0} + \eta^2\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}\right)_{z=0} + \ldots$$

$$= \underbrace{\left(w\right)_{z=0}}_{\mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\right)} + \eta\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0}}_{\mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\frac{H}{h}\right)} + \eta^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_{z=0}}_{\mathcal{O}\left(\frac{H}{T}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right)} + \ldots \qquad \text{(III-14)}$$

donde los órdenes de magnitud de cada término se indican en la parte inferior (recuerde que $w = \mathcal{O}(H/T)$ en la vecindad de $z=\eta$).

Estos órdenes de magnitud indican que si nos restringimos a alturas de oleaje H mucho menores que la profundidad h, o sea $H/h \ll 1$, entonces el primer término en cada serie domina, siendo que este primer término es igual al término correspondiente del miembro izquierdo pero evaluado en z=0 en lugar de $z=\eta$, que es una localización conocida.

Substituyendo pues los términos en la ec.III-11 (derecha) por los primeros términos en su expansión tenemos que si nos restringimos a

$$\frac{H}{L} << 1 \qquad\qquad \frac{H}{h} << 1$$

las condiciones de frontera en la superficie libre se pueden establecer con las expresiones (lineales):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \end{aligned}\right\} \text{ sobre } z = 0 \left\{ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \right. \qquad \text{(III-15)}$$

¡Localización fija conocida lineal!

III.1.4 Linealización de ecuación de Bernoulli.

Para ser congruentes en el grado de aproximación del cálculo de presiones es necesario linealizar la ec. de Bernoulli en el dominio

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{p}{\rho} = -gz + C \qquad \text{(III-16)}$$

que bajo un dearrollo similar en cuanto a los órdenes de magnitud de sus diferentes términos, se puede comprobar que como aproximación de primer orden, se reduce a

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C \qquad \text{(III-17)}$$

III.2 SOLUCION DE EC. GOBERNANTES PARA ONDAS PROGRESIVAS DE FORMA PERMANENTE (Y UNIFORME).

En esta sección buscaremos una solución a las ecuaciones gobernantes linealizadas para el caso especial de ondas (o perturbaciones en la superficie libre) periódicas progresivas planas. La *periodicidad* se refiere al hecho de que las ondas presentarán repetición de su forma a intervalos constantes (en tiempo y espacio). *Progresivas* se refiere al hecho de que las perturbaciones avanzan en una cierta dirección, no se encuentran *estacionarias* sobre un mismo punto. *Planas* se refiere a la característica (simplificatoria) de ser uniformes en una de las direcciones coordenadas horizontales (la dirección normal a la de avance de las mismas. Para que sean periódicas en tiempo y espacio, dichas perturbaciones de la superficie libre tienen que mantener su forma conforme avanzan a través del tiempo y del espacio. Estas condiciones tentativas las establecemos basados en la observación de las ondas mas simples en la naturaleza.

Estas características de la solución buscada se obtienen haciendo depender la solución, no de el tiempo t y el espacio x en forma independiente, sino de la combinación de ambas dada por $\theta = (x - ct)$, donde la c representa la rapidez de avance de la perturbación superficial o *celeridad de onda*. Esta aseveración será comprobada intuitivamente mas adelante.

Por el momento supongamos que la función ϕ buscada depende independientemente de z y de la mencionada combinación de tiempo y espacio θ, o sea aplicamos tentativamente el *método de separación de variables*

$$\phi = Z(z)\ F(\theta) \tag{III-18}$$

donde la función Z contendrá la variación vertical y la fución F la variación en el tiempo y en la dirección horizontal. Al substituir la ec.III-17 en la ecuación de Laplace (ec.II-28 sin la variación con y) se obtiene

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{F''(\theta)}{F(\theta)} \tag{III-19}$$

donde por brevedad en la notación, las derivadas parciales con respecto a la única variable de dependencia se representan con ( )' (por ejemplo $Z'' \equiv \partial^2 Z/\partial z^2$). Se puede observar que el término izquierdo solo depende de z y el derecho solo depende de θ. Puesto que cada lado de la ec.III-18 depende de diferentes variables, y son iguales entre sí, la única posibilidad es que ambos sean iguales a una misma constante, misma que denominaremos por conveniencia k^2.

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = k^2 = \text{constante} = k^2 = -\frac{F''(\theta)}{F(\theta)} \qquad \text{(III-20)}$$

Observemos que las unidades de k son necesariamente [1/longitud] obligada por la doble derivada parcial con respecto a z o θ, que en ambos casos tienen unidades de longitud. De inmediato se concluye que

$$Z''(z) - k^2 Z = 0 \qquad F''(\theta) + k^2 F(\theta) = 0 \qquad \text{(III-21)}$$

con solución general

$$Z(z) = A_1 e^{kz} + A_2\, e^{-kz} \qquad F(\theta) = B_1 \cos k(x-ct) + B_2 \operatorname{sen} k(x-ct) \qquad \text{(III-22)}$$

Con la condición de frontera del fondo

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=-h} = \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{z=-h} = k\, A_1\, e^{-kh} - k\, A_2\, e^{kh} = 0 \qquad \text{(III-23)}$$

de donde

$$A_1 = A_2\, e^{2kh} \qquad \text{(III-24)}$$

que en la ec.III-22 (ecuación izquierda) produce, utilizando la definición del *cosh*,

$$Z(z) = A_2 e^{kh}\left(e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}\right) = A_3 \cosh k(z+h) \qquad \text{(III-25)}$$

donde $A_3 = 2e^{kh} A_2$ sigue siendo una constante arbitraria.

Ahora como los dos términos en F(θ) (ec.III-22 derecha) tienen igual argumento, utilizando conocidas identidades trigonométricas, esta función se puede expresar como

$$F(\theta) = B_3 \operatorname{sen}(k(x-ct)+\delta) \qquad \text{(III-26)}$$

donde B_3 y δ son constantes arbitrarias.

Ajustando el origen de la x y t podemos hacer $\delta = 0$ sin pérdida de generalidad. Recuerde que buscamos soluciones periódicas en tiempo y espacio (que se repiten en estas dos coordenadas hasta el infinito), por lo que un corrimiento arbitrario del origen no cambia la solución. Así pues, reuniendo nuevamente las ecs.III-25 y III-26, como lo indica la ec.III-18,

$$\begin{aligned} \phi &= A \cosh k(z+h) \operatorname{sen} k(x-ct) \\ &= A \cosh k(z+h) \operatorname{sen} (kx-kct) \qquad \text{(III-27)} \end{aligned}$$

donde la constante aún arbitraria es $A=A_3B_3$.

Si exigimos periodicidad en tiempo (y por ende en espacio) con periodo *T*, el coeficiente de t tiene que ser necesariamente $2\pi/T$, o sea

$$\omega = kc = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(III-28)}$$

y el coeficiente de x tiene que ser $2\pi/L$, o sea

$$k = \frac{2\pi}{L} \qquad \text{(III-29)}$$

Esto, en conjunto con su existencia dentro de sen(), garantiza que los valores de ϕ sean los mismos en

x, $x + L$, $x + 2L$, etc. y t, $t+T$, $t+2T$, etc.

Nótese que las unidades de k [rad/longitud] son congruentes con las unidades de

$$\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{tiempo}}\right] = kc \left[\frac{\text{rad}}{\text{longitud}} \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}}\right]$$