

Con esta definición de ω (ec.III-28), ϕ se puede expresar como

$$\phi = A \cosh k(z+h) \sin (kx-\omega t) \quad (\text{III-30})$$

y ahora solo falta por obtener el valor de A de las condiciones de frontera.

De la condición dinámica en la superficie libre, ver ecs.III-15,

$$\eta = - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (\text{III-31})$$

que con la expresión para ϕ en la ec.III-30 produce

$$\eta = \left[\frac{A\omega}{g} \cosh kh \right] \cos (kx-\omega t) \quad (\text{III-32})$$

que representa un perfil sinusoidal de la superficie libre (en ambos, la coordenda espacial x y el tiempo t). Por lo tanto la constante A, misma que no varía en x ni en t se obtiene de la amplitud de dicha senoide (término entre []), que denominaremos como a

$$A = \frac{ag}{\omega} \frac{1}{\cosh kh} \quad (\text{III-33})$$

y esto a su vez en el potencial de velocidad, ec.III-30, produce

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin (kx - \omega t) \quad (\text{III-34})$$

para una superficie libre definida por

$$\eta = a \cos (kx - \omega t) \quad (\text{III-35})$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
 \phi(x,z,t) &= \phi(x+nL, z, t) \\
 &= \phi(x, z, t+mT) \\
 &= \phi(x+nL, z, t+mT)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \phi(x,z,t) \\ \phi(x,z,t) \\ \phi(x+nL, z, t+mT) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} n &= \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ m &= \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta(x,z,t) &= \eta(x+mL, t) \\
 &= \eta(x, t+mT) \\
 &= \eta(x+nL, t+mT)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \eta(x,z,t) \\ \eta(x,z,t) \\ \eta(x+nL, t+mT) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} n &= \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ m &= \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

o sea, tuvimos éxito en encontrar una solución periódica de forma permanente a través de la suposición de separación de variables, ver fig.III.3.

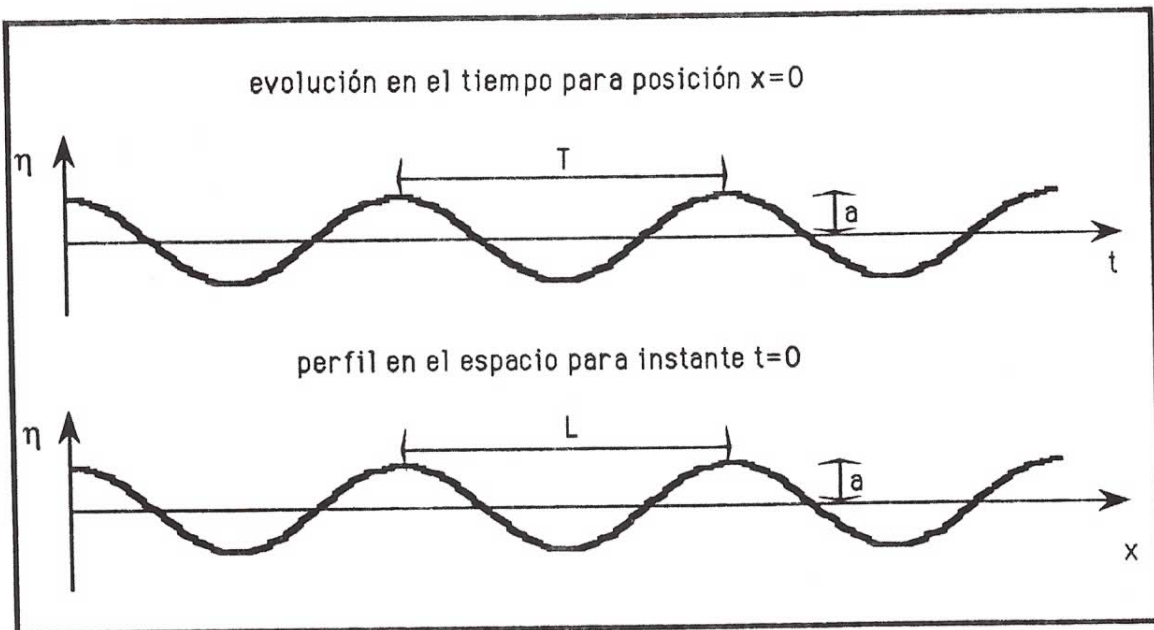


Fig.III.3. Posición de la superficie libre para la solución periódica (en tiempo y espacio) para ondas progresivas de forma constante.

Busquemos una interpretación al hecho de que x y t solo aparecen en la combinación obligada $\theta = kx - \omega t$, argumento de la variación sinusoidal. Este hecho implica que aumentar kx es equivalente a disminuir ωt y viceversa, o sea que los valores de η y ϕ , Δt en el futuro son iguales a los valores de η y ϕ pero $(k/\omega)\Delta x$ hacia atrás en el espacio. De la misma manera, los valores de η y ϕ , Δx hacia adelante en el espacio son iguales a los valores de η y ϕ pero $(\omega/k)\Delta t$

en el pasado. O sea la perturbación en la superficie libre (y sus efectos en el campo de velocidades) tiene una forma constante y avanza a una velocidad

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \text{(III-36)}$$

donde c es llamada la *celeridad de la onda*. Esto es más fácil de interpretar considerando que $\theta = \text{constante}$ representa un punto fijo sobre esta forma en la superficie libre (por ejemplo $\theta = 0$ representa la parte más alta de la senoide o *cresta*, porque para este valor se da que $\eta(x,t) = a$) y estudiando la fig.III.4.

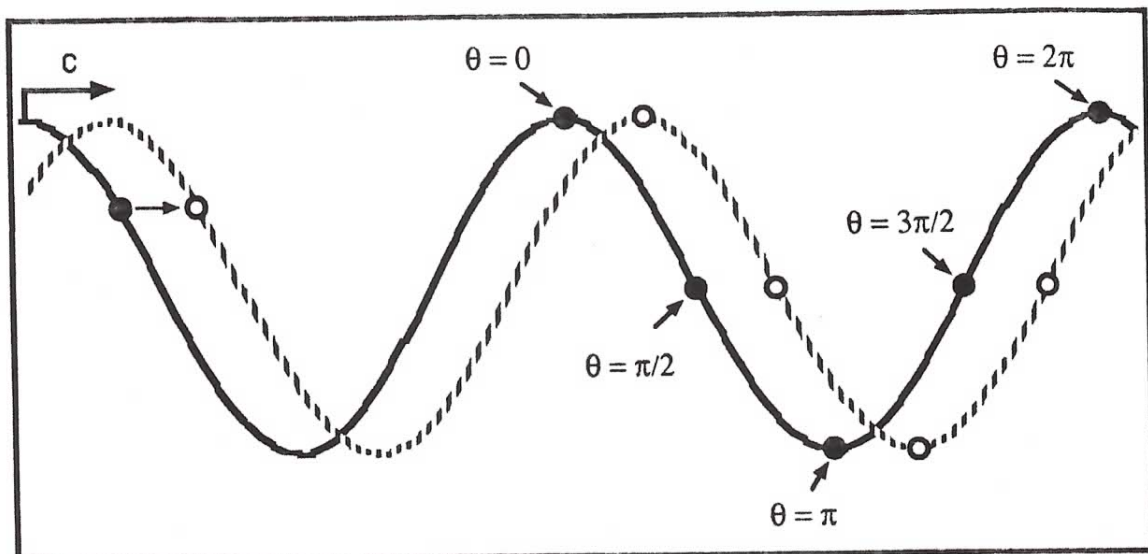


Fig.III.4. Esquema del movimiento de la perturbación en la superficie libre, avanzando con forma constante. La línea y puntos sólidos muestran la posición original, mientras que la línea punteada y los puntos vacíos muestran la posición sucesiva correspondiente (en tiempo o espacio).

III.3 SOLUCION DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES PARA ONDAS ESTACIONARIAS.

De haber exigido que la solución por separación de variables fuese periódica en x y t , pero no progresiva (o sea no obligando a la

combinación $kx - \omega t$) hubiésemos llegado a otra solución de las ecuaciones gobernantes, igualmente válida, pero que representa ondas estacionarias. Estas perturbaciones en la superficie libre no avanzan sobre ella, sino que permanecen fijas en su posición original. La fig.III.5 esquematiza este comportamiento periódico no progresivo. Las expresiones correspondientes son

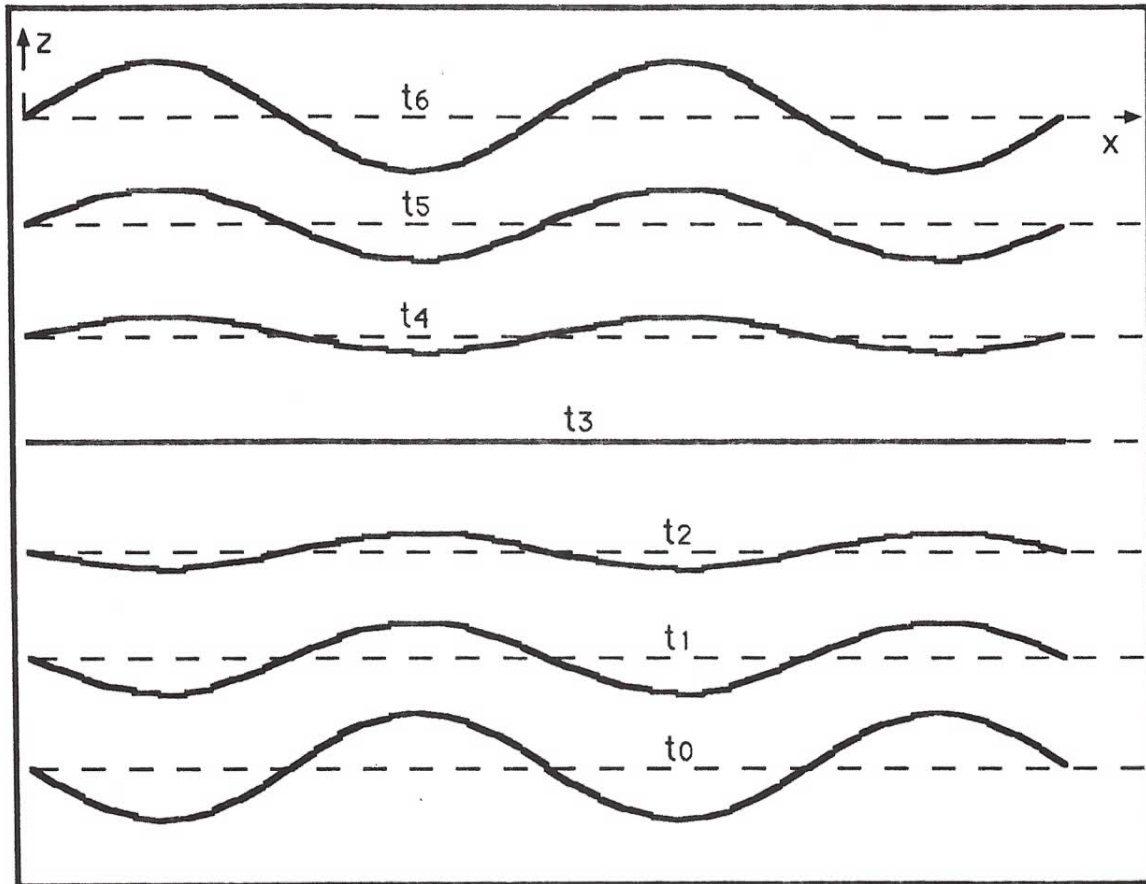


Fig.III.5. Esquema de la evolución en el tiempo de la superficie libre de una ola estacionaria. Las líneas punteadas indican el nivel $z=0$ y los tiempos indicados son cronológicos, o sea $t_0 < t_1 < \dots < t_5 < t_6$ y solo cubren $1/2$ del período de oscilación (el otro medio período indica un movimiento igual pero en el sentido contrario hasta alcanzar la condición inicial correspondiente a $t=t_0$).

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (\text{III-37})$$

$$\eta = a \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (\text{III-38})$$

mismas que no obtendremos formalmente aquí puesto que posteriormente utilizaremos una propiedad de las ecuaciones lineales para reconstruirla en una forma distinta. Detalles sobre la obtención formal se pueden consultar en Dean y Dalrymple (1984).

III.4 LA RELACION DE DISPERSION Y LA CELERIDAD DE LA OLA.

Hasta ahora nuestra solución, aunque completa, permite a k y a ω valores independientes cualesquiera. Sin embargo no se cumple todavía con la condición cinemática de frontera en la superficie libre.

Al introducir la expresión de ϕ para ondas progresivas, ec.III-34, en la condición de frontera expresada en términos de ϕ , ec.III-15 derecha:

$$-\omega^2(\phi)_{z=0} + gk \frac{\operatorname{senh} kh}{\operatorname{cosh} kh} (\phi)_{z=0} = 0 \quad (\text{III-39})$$

o simplificando

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (\text{III-40})$$

lo que indica claramente que los valores de k y ω no son independientes; o sea, para una profundidad h dada, a cada frecuencia (o período) de oleaje corresponde un número de onda (o longitud de ola) específico, y viceversa (aún cuando matemáticamente para cada k corresponden 2 valores distintos de ω , solo uno de ellos es físicamente razonable).

De la ec.III-40 no se puede despejar explícitamente el valor de k , por lo que en la aplicación práctica, cuando se conoce ω (o T) y se desea obtener el valor de k (o L), se requiere un procedimiento iterativo. La relación entre ω y k definida por la ec.III-40 se encuentra

representada graficamente en la fig.III.6.

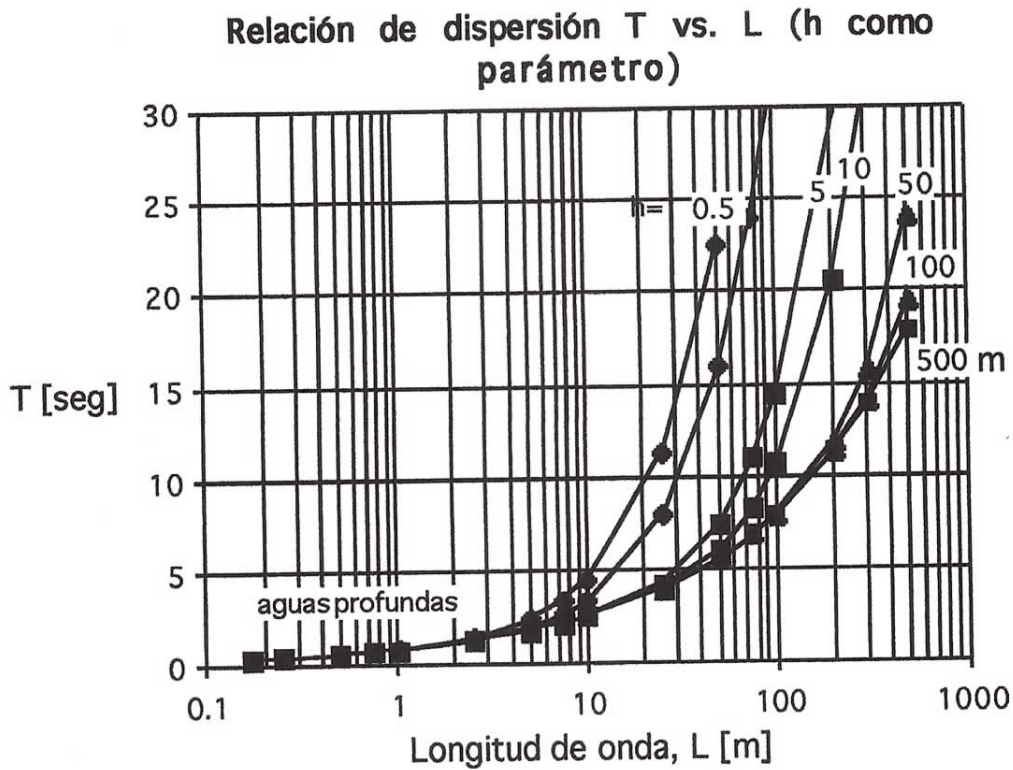


Fig.III.6. Relación de dispersión ($\omega^2 = gk \tanh(kh)$) en términos de periodo, longitud de onda y profundidad.

Basados en interpretación física de la onda progresiva, una cresta (o para el caso, cualquier otro punto fijo sobre la perturbación superficial) avanza a una velocidad

$$C = \frac{L}{T} = \frac{(2\pi/k)}{(2\pi/\omega)} = \frac{\omega}{k}$$

o sea, avanza una longitud de onda en un periodo. Introduciendo la ec.III-40 en la anterior, la celeridad de onda resulta

$$C = \frac{g}{\omega} \tanh kh = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \quad \text{(III-41)}$$

que indica que la celeridad depende de la frecuencia (o del periodo)

o, en forma equivalente, del número de onda (o la longitud de onda). Esto está en contraste con la teoría tradicional de ondas donde la velocidad de la onda es una constante para cada medio (por ejemplo la velocidad de la luz en el vacío es de 300,000 km/s o la velocidad del sonido en aire es aproximadamente 340 m/s) sin importar la frecuencia (que en los ejemplos se manifiesta como *color* en el caso de luz o como *tono* en el caso de sonido). Esta diferencia es lógica, puesto que la relación $\omega \longleftrightarrow k$ proviene de la condición dinámica de la superficie libre que no tiene una contraparte en la teoría tradicional de ondas.

La ec.III-40 es llamada la relación de dispersión porque las ondas largas (período grande) avanzan mas rápido que ondas cortas (período pequeño) por lo tanto olas de diferente frecuencia se *dispersan* en el espacio.

Nótese que al menos en esta teoría lineal de oleaje, la celeridad de la ola no depende de su altura, olas pequeñas y grandes (en cuanto a amplitud) viajan a la misma velocidad si son de la misma frecuencia o longitud de onda.

III.5 CARACTERISTICAS INGENIERILES DE OLAS LINEALES.

Ya con la solución al problema, representada por las ecs.III-34,35,40 y 41 (para olas progresivas), busquemos expresiones para las características de uso ingenieril del oleaje lineal.

III.5.1 Campo de presiones.

Introduciendo ϕ (ec.III-37) en la ecuación linealizada de Bernoulli (ec.III-17) se obtiene

$$p_+ = p + \rho g z = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho g a \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III-42})$$

donde el subíndice (+) en el primer miembro indica que p_+ es la presión adicional a la hidrostática debida al oleaje (p representa la presión total y $-\rho g z$ la presión hidrostática; recuerde que z es negativa en la zona bajo la superficie libre original).

Observe que p_+ está en fase con $\eta = a \cos(kx - \omega t)$, o sea que los máximos y mínimos de sus variaciones con t y x coinciden, y que se atenúa con la profundidad porque la función $\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$ disminuye al aumentar la distancia a la superficie libre (o sea al hacerse más negativo z).

La presión bajo una cresta es, al nivel original de la superficie libre

$$z = 0 \quad p_+ = \rho g a$$

mientras a nivel del fondo es

$$z = -h \quad p_+ = \rho g a / \cosh kh$$

La variación de la presión con la profundidad bajo una cresta, $[p(z)]_{\theta=0}$, se esquematiza en la fig.III.7.

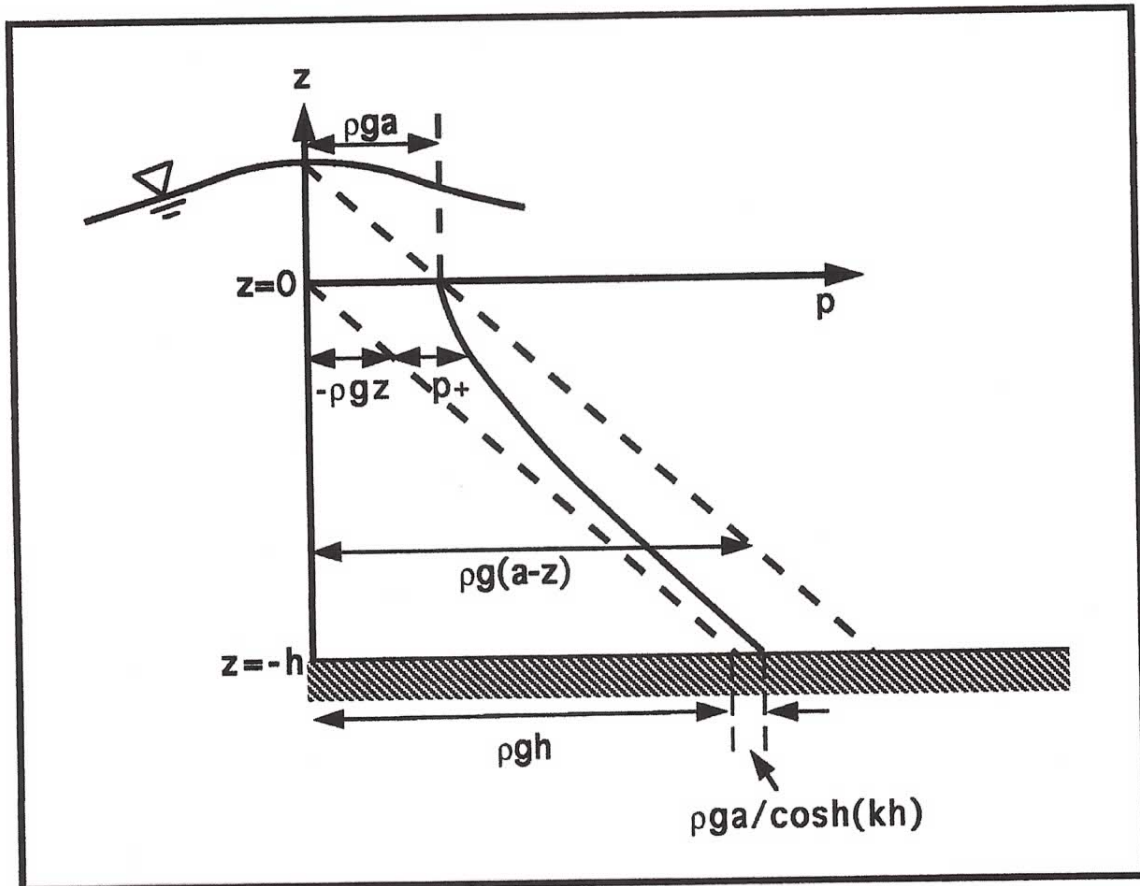


Fig.III.7. Distribución vertical de presiones bajo una cresta (para $\theta = kx - \omega t = 0$). Las dos líneas punteadas indican las distribuciones hidrostáticas bajo el nivel original y bajo el nivel aumentado por el oleaje.

III.5.2 Campo de velocidades.

Derivando la expresión para ϕ , ec.III-37, con respecto a x (ver ec.II-26), se obtiene una expresión para $u(x,z,t)$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t)$$

$$a\omega \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t) \quad \text{(III-43)}$$

que también indica una variación en fase con la de la superficie libre, y atenuación en la profundidad. De la misma manera, derivando ϕ con

respecto a z se obtiene para la velocidad vertical $w(x,z,t)$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = a\omega \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \omega t) \quad (\text{III-44})$$

en este caso $\pi/2$ fuera de fase con $\eta(x,t)$ y también atenuado en la profundidad. Observe que u y w se encuentran $\pi/2$ radianes fuera de fase, es decir, cuando u es máximo, $w=0$ y cuando w es máximo $u=0$. El campo de velocidad total q (compuesta de u y w) se muestra esquemáticamente en la fig.III-8, para 4 zonas bajo la onda superficial (crestas, valles y cruces con $z=0$).

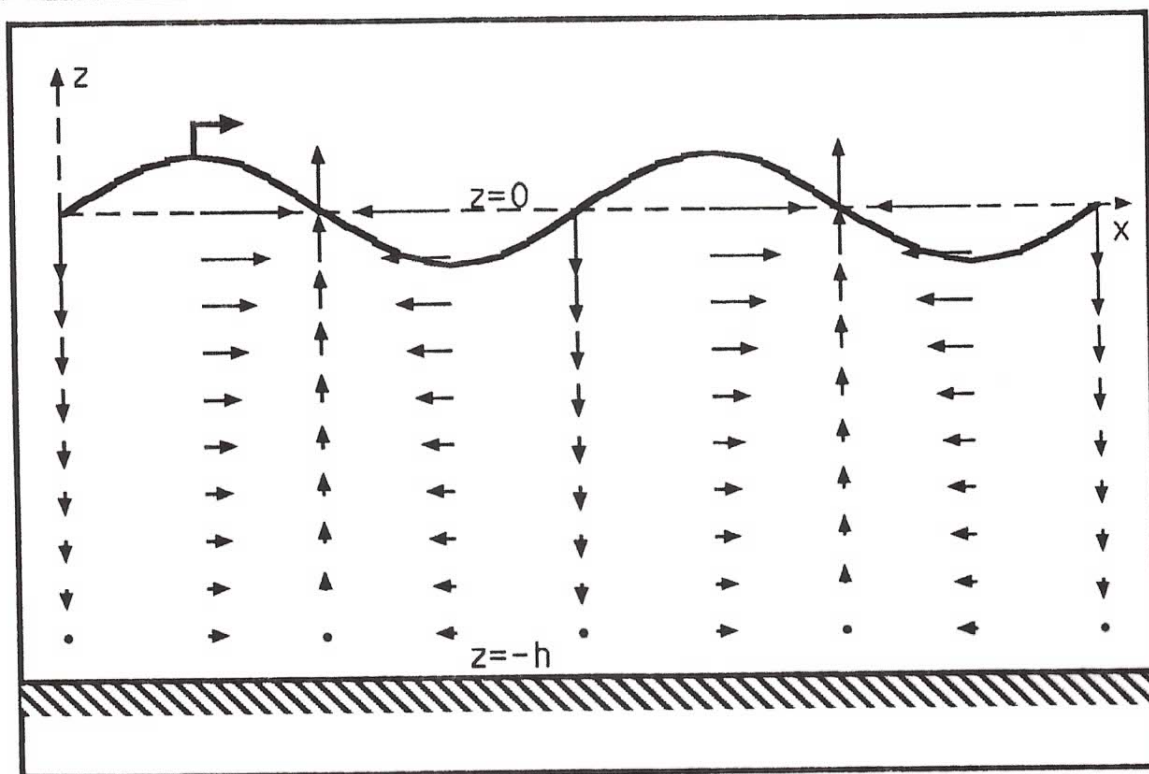


Fig.III.8. Esquema de vectores del campo de velocidades bajo crestas, valles y cruces con cero.

Observemos que la condición de frontera de fondo, ec.II-45 o ya aplicada a este caso $w=0$ en el fondo, se cumple idénticamente al substituir $z=-h$ en la ec.III-44. También podemos comprobar que, puesto que se permitió *deslizamiento* en el fondo, la velocidad horizontal en el fondo, a la que llamaremos u_b , no es nula; al substituir $z=-h$ en la ec.III-43 se obtiene

$$u_b = u(x,t,z=-h) = \frac{a\omega}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t) \quad \text{(III-45)}$$

La amplitud de este movimiento armónico de las partículas de fluido en el fondo, U_b , aunque sabemos no se ajusta a la realidad, tiene gran utilidad en el estudio de las interacciones oleaje-fondo, y esta definida por

$$U_b = \frac{a\omega}{\sinh kh} \quad \text{(III-46)}$$

III.5.3 Campo de aceleraciones.

El campo de aceleraciones se obtienen simplemente derivando el campo de velocidades con respecto al tiempo. Sin embargo, por definición, la derivada a obtener es una derivada total, o sea estrictamente

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{(III-47)}$$

Un análisis de órdenes de magnitud nos lleva a que los 3 términos del lado derecho son del orden

$$O\left(\frac{H}{T^2}\right) \quad O\left(\frac{H}{T^2} \frac{H}{L}\right) \quad O\left(\frac{H}{T^2} \frac{H}{h}\right)$$

respectivamente. Por lo tanto, bajo las suposiciones ya hechas con anterioridad en el desarrollo, para

$$\frac{H}{L} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{H}{h} \ll 1$$

el segundo y tercer término son mucho menores que el primero, por lo tanto a un grado de aproximación consistente con el resto del desarrollo se tiene que

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t}$$

y operando de acuerdo a esto sobre la ec.III-43 se obtiene

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = a\omega^2 \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(kx-\omega t) \quad (\text{III-48})$$

De forma similar, para la aceleración vertical se tiene

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{III-49})$$

que para

$$\frac{H}{L} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{H}{h} \ll 1 \quad \text{se aproxima con} \quad a_z = \frac{\partial w}{\partial t}$$

por lo tanto

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -a\omega^2 \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(kx-\omega t) \quad (\text{III-50})$$

Obsérvese que las aceleraciones están fuera de fase por $\pi/2$ con respecto a las velocidades, o sea en el instante (o punto) de máxima velocidad en una cierta dirección (x o z), la aceleración en dicha dirección es nula y viceversa, en el instante (o punto) de máxima aceleración, la velocidad es nula. Este es el caso típico de cualquier movimiento armónico. Esto puede interpretarse fácilmente graficando las ecs.III-43 y III-48 (o alternativamente las ecs.III-44 y III-50), que son ambas curvas sinusoides. Puesto que la máxima velocidad se da en la cresta de la senoide de velocidad, en dicho instante (o punto) la velocidad permanece sin cambio durante un intervalo infinitesimal (puesto que la traza cambia de ascendente a descendente en dicho punto) y por lo tanto, por definición, la aceleración correspondiente es nula.

III.5.4 Órbita de las partículas.

El desplazamiento de una partícula de fluido se obtiene como la