

integral con respecto al tiempo de la velocidad instantánea de dicha partícula,  $u_p$  (en dirección horizontal) y  $w_p$  (en dirección vertical). Puesto que la velocidad instantánea varía con la posición misma de la partícula (que al moverse se ve *inmersa* en una campo de velocidades cambiante), esto se expresa como

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \int u_p dt = x_o + \int u(x_p, z_p, t) dt \\
 z_p(t) &= \int w_p dt = z_o + \int w(x_p, z_p, t) dt
 \end{aligned}
 \tag{III-51}$$

Tal como aparecen, las integrales presentan un tipo de *no linealidad* puesto que el integrando depende de las coordenadas del punto, que es lo que se desea obtener. En otras palabras, las expresiones presentadas son implícitas en  $x_p$  y  $z_p$ . Para evaluar las integrales expandimos en serie de Taylor alrededor de  $(x_o, z_o)$

$$\begin{aligned}
 u_p(t) = u(x_p, z_p, t) &= u(x_o, z_o, t) + (x_p - x_o) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(x_o, z_o)} + \\
 &\quad (z_p - z_o) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{(x_o, z_o)} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{III-52a}$$

$$\begin{aligned}
 w_p(t) = w(x_p, z_p, t) &= w(x_o, z_o, t) + (x_p - x_o) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{(x_o, z_o)} + \\
 &\quad (z_p - z_o) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{(x_o, z_o)} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{III-52b}$$

términos cuyos ordenes de magnitud respectivo son

$$O\left(\frac{H}{T}\right) \quad O\left(\frac{H}{T} \frac{H}{L}\right) \quad O\left(\frac{H}{T} \frac{H}{L}\right)$$

por lo tanto, para  $H/L \ll 1$  tenemos

$$u(x_p, z_p, t) \approx u(x_o, z_o, t) \quad w(x_p, z_p, t) \approx w(x_o, z_o, t) \quad (\text{III-53})$$

lo que indica que para el grado de aproximación de la teoría desarrollada (de 1<sup>er</sup> orden o lineal), el campo de velocidades en el que esta inmerso la partícula se aproxima con el valor de la velocidad al centro de la órbita que coincide con la posición original de la misma (sin la perturbación del oleaje).

Introduciendo las expresiones para  $u$  y  $w$  (ecs.III-43 y 44) en las ecs.III-51 e integrando se obtiene

$$x_p - x_o = -a \frac{\cosh k(z_o + h)}{\sinh kh} \sin(kx_o - \omega t) \quad (\text{III-54})$$

$$z_p - z_o = a \frac{\sinh k(z_o + h)}{\sinh kh} \cos(kx_o - \omega t) \quad (\text{III-55})$$

Los miembros izquierdos de las ecs. III-54 y III-55 representan la distancia (horizontal y vertical respectivamente) entre la posición instantánea y la posición original de la partícula, misma a la que llamaremos la *excursión* de la partícula.

Obsérvese que para  $z_o = 0$  se obtiene  $z_p = \eta$  (ver ec.III-35) como lo obliga la condición de frontera cinemática en la superficie. Así mismo para  $z_o = -h$  se obtiene  $z_p = 0$  como lo obliga la condición de frontera en el fondo. El movimiento horizontal en el fondo es

$$x_p - x_o = \frac{a}{\sinh kh} \sin(kx_o - \omega t) \quad (\text{III-56})$$

$A_b$

donde  $A_b$  es la amplitud del movimiento horizontal cerca del fondo que, aunque irreal puesto que no debe existir *deslizamiento*, es muy

utilizada en estudios de interacción oleaje-fondo.

Combinando las ecs. III-54 y III-55 se llega a la conclusión de que las trayectorias de las partículas son elípticas con la ecuación

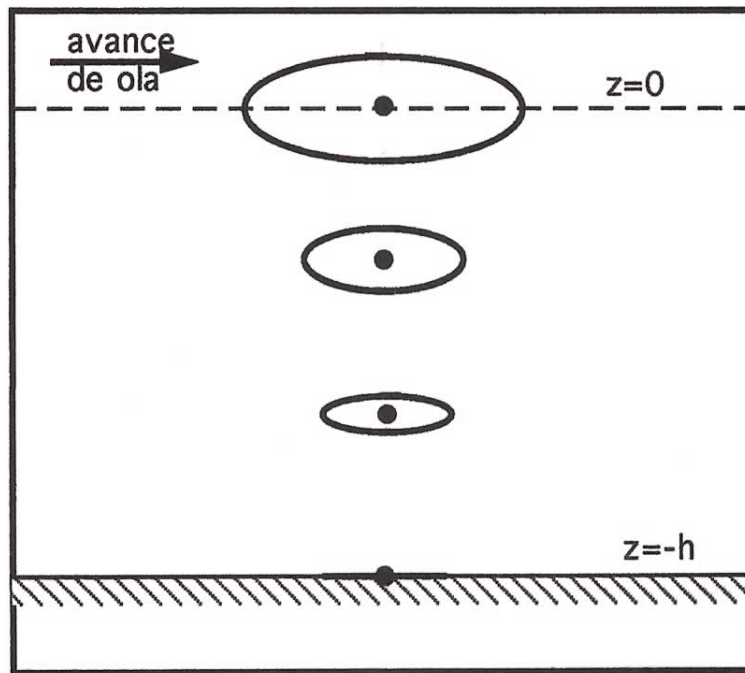
$$\frac{\left(x_p - x_o\right)^2}{A^2} + \frac{\left(z_p - z_o\right)^2}{B^2} = 1 \quad \text{(III-57)}$$

donde los semiejes son

$$A = a \frac{\cosh k(z_o + h)}{\sinh kh} \quad (\text{semieje mayor en dirección } x) \quad \text{(III-58)}$$

$$B = a \frac{\sinh k(z_o + h)}{\sinh kh} \quad (\text{semieje menor en dirección } z) \quad \text{(III-59)}$$

La figura III.9 esquematiza las órbitas para varios valores de  $z_o$ .



**Fig.III.9.** Variación con la profundidad de las órbitas de las partículas. Los puntos al centro de las órbitas elípticas representan la posición original de la partícula sin oleaje. La parte superior de cada elipse, donde se encuentra la flecha que indica el sentido de giro, representa el instante bajo una cresta. El caso límite en el fondo representa movimiento cíclico únicamente horizontal.

### III.6 SIMPLIFICACIONES PARA AGUAS PROFUNDAS Y SOMERAS.

La teoría desarrollada hasta este momento es válida, dentro de las limitaciones intrínsecas de las suposiciones hechas, para aguas de cualquier profundidad. Sin embargo se acostumbra utilizar expresiones simplificadas para los casos especiales de *aguas profundas* y de *aguas someras*, mismas que se tratan a continuación. Por razones obvias, al no cumplirse las condiciones de aguas profundas o aguas someras, las expresiones que deben utilizarse son las más generales vistas con anterioridad. Por esto es que, en ocasiones, a estas expresiones

generales se les denomina de *aguas intermedias*.

### III.6.1 Aguas profundas ( $kh \gg 1$ )

Debido al decaimiento del movimiento inducido por el oleaje con la distancia desde la superficie hacia el fondo, es de esperarse que para aguas profundas la presencia del fondo no tenga ninguna influencia en los campos de aceleración, velocidad y desplazamiento. Ingenierilmente se acostumbra considerar *oleaje en aguas profundas* a aquellas que cumplen con  $h/L \geq 0.5$ . Obsérvese que la profundidad se considera en forma *relativa* a la longitud de onda del oleaje del que se trata. Inclusive las profundidades promedio de los océanos, del orden de 4000m, no pueden considerarse como aguas profundas cuando se trata de oleaje de gran longitud de onda, como los tsunamis (olas generadas por sismo o acción volcánica) o las ondas de marea astronómica. Por esta razón, las condiciones de oleaje en aguas profundas se denominan equivalentemente *olas cortas*.

A continuación se presenta en forma de tabla, una serie de expresiones matemáticas comunes en la teoría desarrollada anteriormente junto con su límite conforme  $kh \rightarrow \infty$  (o sea válido en forma aproximada cuando  $kh \gg 1$ ). Además en el extremo derecho se presenta el valor relativo de la expresión del centro (el límite para  $kh \gg 1$ ) con respecto a la expresión completa (en porcentaje), evaluado para el límite ingenieril mencionado,  $h/L = 0.5$ .

Expresión	tiende a	% aprox. para $\frac{h}{L} = 0.5$
$\tanh(kh)$	$\longrightarrow 1$	99.6 %
$\cosh kh = \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{2}$	$\longrightarrow \frac{e^{kh}}{2}$	99.8 %
$\sinh kh = \frac{e^{kh} - e^{-kh}}{2}$	$\longrightarrow \frac{e^{kh}}{2}$	100.18 %

$$\begin{array}{l} \cosh k(z+h) \longrightarrow \frac{e^{k(z+h)}}{2} \qquad 95.86 \% \\ \text{(lejos del fondo)} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{(para } z = -0.5h) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sinh k(z+h) \longrightarrow \frac{e^{k(z+h)}}{2} \qquad 104.52 \% \\ \text{(lejos del fondo)} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{(para } z = -0.5h) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \\ \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \\ \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \end{array} \right\} \longrightarrow e^{kz}$$

Utilizando estos resultados en las ecuaciones generales respectivas se obtiene que una buena aproximación para  $kh \gg 1$  (ingenierilmente  $h/L \geq 0.5$ ) se obtiene con

$$\omega^2 = gk \qquad \text{(III-40 a.p.)}$$

$$C = \frac{g}{\omega} \qquad \text{(III-41 a.p.)}$$

$$p_+ = \rho g a e^{kz} \cos(kx - \omega t) \qquad \text{(III-42 a.p.)}$$

$$u = a\omega e^{kz} \cos(kx - \omega t) \qquad \text{(III-43 a.p.)}$$

$$w = a\omega e^{kz} \text{sen}(kx - \omega t) \quad (\text{III-44 a.p.})$$

$$a_x = -a\omega^2 e^{kz} \text{sen}(kx - \omega t) \quad (\text{III-48 a.p.})$$

$$a_z = -a\omega^2 e^{kz} \text{cos}(kx - \omega t) \quad (\text{III-50 a.p.})$$

$$\frac{(x_p - x_o)^2}{A^2} + \frac{(z_p - z_o)^2}{B^2} = 1 \quad (\text{III-57 a.p.})$$

$$A = B = ae^{kz}$$

donde los números asignados a las ecuaciones se refieren a las ecuaciones originales pero con la anotación a.p.(aguas profundas).

Obsérvese que ahora las órbitas de las partículas son circulares, así como los campos de velocidad y aceleración son simétricos en cuanto a las direcciones  $x$  y  $z$ . Como se esperaba, la profundidad  $h$  no interviene explícitamente en ninguna de las expresiones, esto es, el fondo no influye en la forma de las distribuciones verticales de ninguna de las variables. Este último punto se esquematiza en la figura III.10, donde se observa que hasta el nivel del fondo del lado izquierdo, la distribución vertical es idéntica en ambos casos.

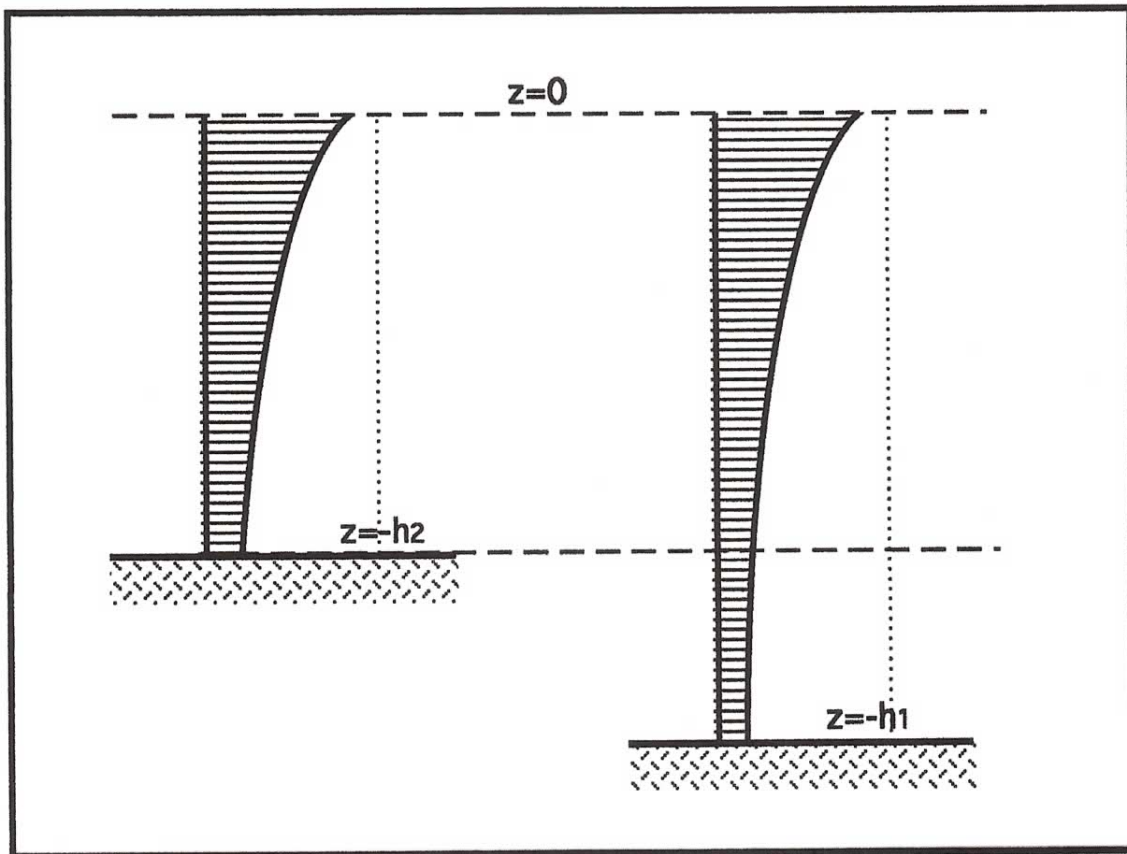


Fig.III.10. Variación vertical de las variables bajo condiciones de aguas profundas para 2 profundidades distintas.

### III.6.2 Aguas someras ( $kh \ll 1$ )

De la misma manera, es de esperarse que para aguas poco profundas, la presencia del fondo tenga una influencia esencial en el movimiento inducido por las olas al fluido. En el contexto ingenieril se acostumbra denominar *olas de aguas someras* u *olas largas* a aquellas cuya relación de profundidad a longitud de onda cumple  $h/L < 0.05$ . A continuación se presenta en forma de tabla una serie de expresiones matemáticas comunes en la teoría lineal de oleaje y el valor al que tienden cuando  $h/L \rightarrow 0$  (o sea aproximaciones válidas para  $kh \ll 1$ ). Para algunas de ellas se muestra el valor porcentual que la expresión aproximada tiene con respecto a la exacta al valuarse para el límite  $h/L = 0.05$ .

Expresión	tiende a	% aprox. para $\frac{h}{L} = 0.05$
$\tanh(kh)$	$\longrightarrow kh$	103.27



$\cosh(kh)$	$\longrightarrow$	1	104.97
$\sinh(kh)$	$\longrightarrow$	kh	98.37
$\cosh k(z+h)$	$\longrightarrow$	1	
$\sinh k(z+h)$	$\longrightarrow$	$k(z+h)$	
$\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$	$\longrightarrow$	1	
$\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{kh}$	
$\frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh}$	$\longrightarrow$	$k(z+h)$	
$\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}$	$\longrightarrow$	$\frac{k(z+h)}{kh} = \frac{kz+kh}{kh} = \frac{z}{h} + 1$	

---

Utilizando estas expresiones en las ecuaciones generales respectivas se obtienen las simplificaciones para aguas someras (válidas aproximadamente para  $h/L \leq 0.05$ )

$$\omega = \sqrt{gh} k \quad \text{(III-40 a.s.)}$$

$$C = \sqrt{gh} \quad \text{(III-41 a.s.)}$$

$$p_+ = \rho g a \cos(kx - \omega t) = \rho g \eta \quad \text{(III-42 a.s.)}$$

$$u = \frac{a\omega}{kh} \cos(kx - \omega t) \quad \text{(III-43 a.s.)}$$

$$w = a\omega \left( 1 + \frac{z}{h} \right) \sin(kx - \omega t) \quad \text{(III-44 a.s.)}$$

$$a_x = \frac{-a\omega^2}{kh} \sin(kx - \omega t) \quad \text{(III-48 a.s.)}$$

$$a_y = -a\omega^2 \left( 1 + \frac{z}{h} \right) \cos(kx - \omega t) \quad \text{(III-50 a.s.)}$$

$$\frac{(x_p - x_o)^2}{A^2} + \frac{(z_p - z_o)^2}{B^2} = 1 \quad \text{(III-57 a.s.)}$$

$$A = \frac{a}{kh} \quad B = a \left( 1 + \frac{z}{h} \right)$$

donde nuevamente la numeración de las ecuaciones corresponde a las ecuaciones generales originales con la anotación a.s.(aguas someras).

Es importante puntualizar que la coordenada  $z$  no aparece en ninguna de las cantidades *horizontales*, lo que indica uniformidad de estas en la profundidad. Esto se indica en la figura III.11 donde, además, se muestra la atenuación *lineal* de las cantidades *verticales* con la distancia del nivel  $z=0$  hacia el fondo. Nótese además que la presión es la hidrostática correspondiente al nivel instantáneo de la superficie libre y que la celeridad de las ondas es independiente de  $\omega$ , o sea que una vez en aguas someras las ondas de todas frecuencias (que ya cumplan con esta condición) viajan a igual velocidad; en aguas someras la *relación de dispersión no es dispersiva*.

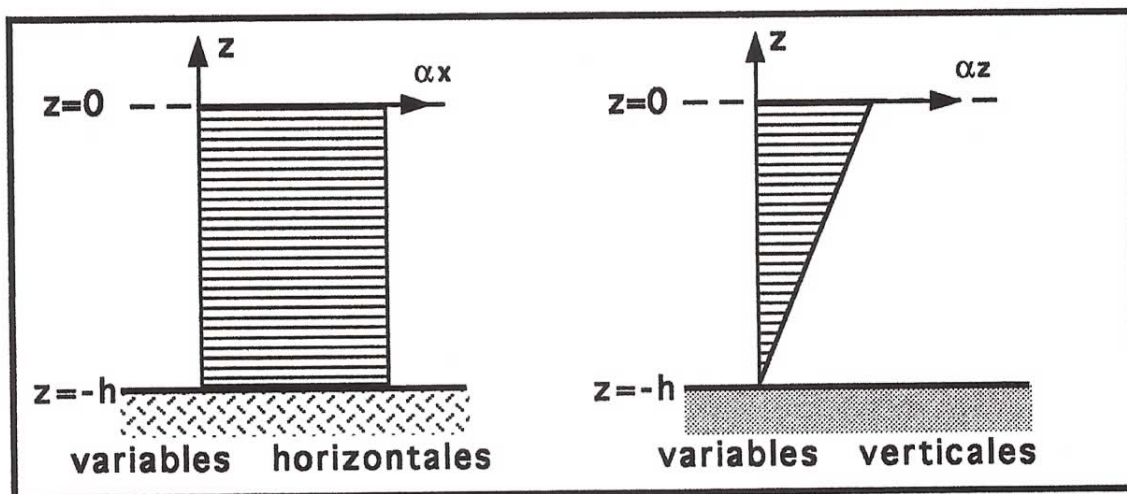


Fig.III.11. Variación vertical de variables horizontales (como  $u$ ,  $a_x$ ,  $A$ ,  $p_+$ ) y variables verticales (como  $w$ ,  $a_y$ ,  $B$ ), representadas por  $\alpha_x$  y  $\alpha_z$  respectivamente en las gráficas.

La ec.III-43 a.s. indica una velocidad horizontal significativamente mayor que lo supuesto en el análisis de ordenes de magnitud realizado anteriormente ( $u = O(H/T) = O(2a\omega/2\pi) = O(a\omega/\pi)$ ). La ecuación III-43 a.s. indica un orden  $u = O(a\omega/kh)$  y puesto que la simplificación es para  $kh \ll 1$  esto resulta mucho mayor que  $O(a\omega/\pi)$ . Esta es la primera indicación que tenemos sobre el hecho de que la teoría lineal de oleaje no es adecuada para aguas muy poco profundas. Adelantaremos el concepto de que aumentar el orden de aproximación (a 2º orden o mayor) no soluciona totalmente el problema y será necesario utilizar teorías desarrolladas específicamente para aguas poco profundas.

### III.7 SUPERPOSICION DE ONDAS PROGRESIVAS.

En teoría lineal, situaciones mas complejas que una simple onda progresiva se pueden describir superponiendo varias ondas progresivas, porque utilizando una propiedad fundamental de las ecuaciones diferenciales lineales, si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son cualesquiera 2 soluciones, entonces  $\phi_3 = k_1\phi_1 + k_2\phi_2$  es también solución (donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes cualquiera). Esto también es válido para  $\eta$ ,  $p_+$ ,  $u$ ,  $w$ , etc.

#### III.7.1 Uso de variable compleja

Una cantidad compleja  $\mathcal{A}$  puede ser expresada como

$$\mathcal{A} = X + iY = A e^{i\delta} \quad (\text{III-60})$$

donde

$$A = |\mathcal{A}| = |X+iY| = \sqrt{X^2+Y^2} \quad (\text{III-61})$$

$$\delta = \arctan \frac{Y}{X} \quad 0 \leq \delta \leq 2\pi \quad (\text{III-62})$$

$$X = |\mathcal{A}| \cos \delta \quad (\text{III-63})$$

$$Y = |A| \text{ sen } \delta$$

(III-64)

ver figura III.12.

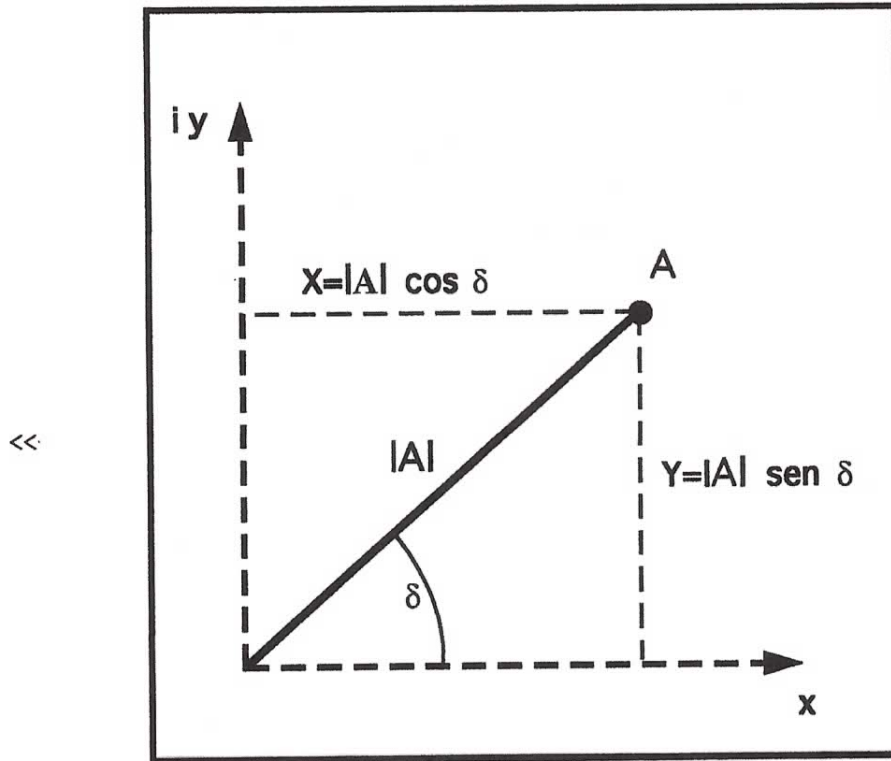


Fig.III.12. Diagrama de un número en el plano complejo.

Por lo tanto, una cantidad armónica típica de la teoría de ondas

$$\alpha = A \cos (\theta - \delta)$$

(III-65)

donde  $\theta = kx - \omega t$  y  $\delta$  es la fase (o sea ubica a la cresta de la senoide más a la derecha o izquierda sobre el eje  $\theta$ ), se puede expresar como

$$\alpha = \text{Real} \left\{ A e^{-i\theta} \right\}$$

(III-66)

porque con  $A = A e^{i\delta}$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \text{Real} \left\{ \left( A e^{i\delta} \right) e^{-i\theta} \right\} = A \text{Real} \left\{ e^{-i(\theta-\delta)} \right\} \\
&= A \text{Real} \left\{ \cos (\theta-\delta) -i \text{sen} (\theta-\delta) \right\} \\
&= A \cos(\theta-\delta)
\end{aligned}
\tag{III-67}$$

resultando igual a la ec III-65.

Nótese que  $\mathcal{A}$ , la amplitud compleja, contiene información sobre la amplitud (A) y la fase ( $\delta$ ). Es muy conveniente, en términos algebraicos, trabajar con números complejos, interpretando el problema físico con la parte real, debido a la complejidad de trabajar con funciones e identidades trigonométricas. El lector puede comprobar fácilmente esto, para lo que será suficiente que intente hacer alguno de los desarrollos en que utilizaremos algebra de números complejos sin recurrir a esta y limitándose a las funciones trigonométricas con interpretación física directa.

### III.7.2 Superposición de varias ondas progresivas avanzando en la misma dirección.

La observación directa de la superficie del mar, aún en forma casual, muestra que su condición es aleatoria; esto es, aún conociendo el desarrollo pasado de las olas en un cierto punto, no se puede afirmar con certeza las características de las siguientes olas. Para simular esta condición en un cierto punto, se pueden superponer un número grande (idealmente un número infinito) de ondas progresivas, como las descritas en la teoría hasta ahora desarrollada, viajando en la misma dirección. O sea, el potencial de velocidades de un mar más realista se puede simular a través de