

$$\phi = \sum_{n=1}^N \phi_n = \sum_{n=1}^N \frac{a_n g}{\omega_n} \frac{\cosh k_n (z+h)}{\cosh k_n h} \sin (k_n x - \omega_n t + \delta_n) \quad (\text{III-68})$$

con las frecuencias y números de onda de cada componente relacionados por

$$\omega_n^2 = g k_n \tanh k_n h \quad (\text{III-69})$$

produciendo una superficie libre

$$\eta = \sum_{n=1}^N a_n \cos (k_n x - \omega_n t + \delta_n) \quad (\text{III-70})$$

donde la aleatoriedad se introduce en las fases δ_n como números random uniformemente distribuidos entre 0 y 2π y las amplitudes se obtienen de la distribución de energía en las frecuencias que se desee simular (espectro de oleaje, más sobre el tema en capítulos posteriores).

Este movimiento complicado del flujo sigue cumpliendo con las ecuaciones gobernantes y con las condiciones de frontera por lo que es una solución obtenida como la superposición de muchas soluciones. La figura III.13 muestra un registro de oleaje obtenido a través de superposición de varias ondas sinusoidales en laboratorio, ver Rosengaus (1987).

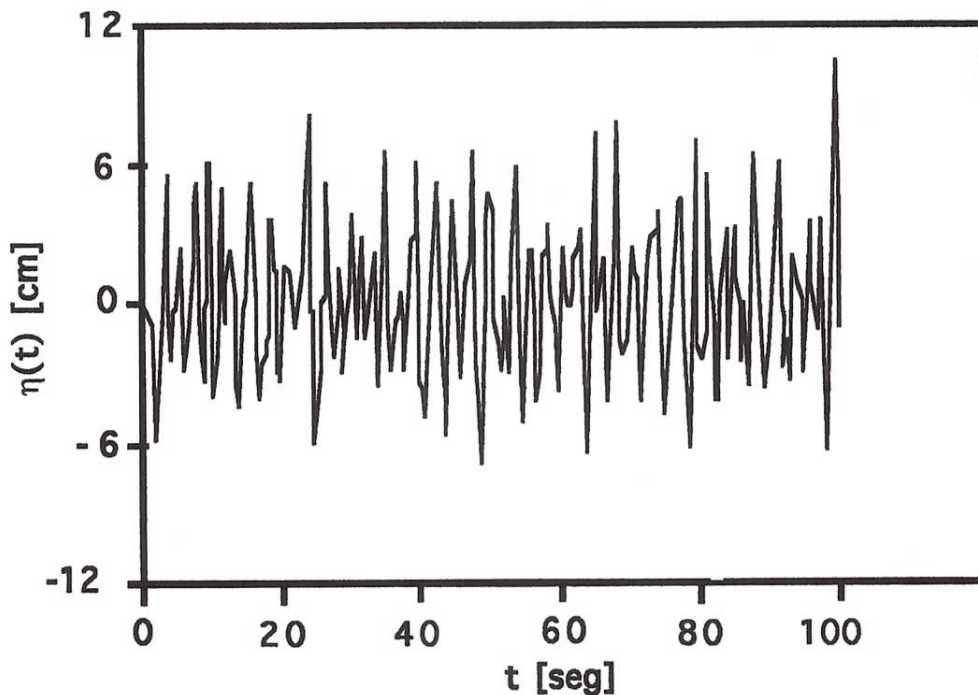


Fig.III.13. Oleaje obtenido con la superposición de 8 componentes frecuenciales. El registro de la variación de la superficie libre en el tiempo es experimental y corresponde a condiciones de laboratorio (fuente: Rosengaus 1987).

III.7.3 Grupos de olas (u oleaje de amplitud modulada).

Veamos que condición se puede lograr al superponer 2 olas progresivas viajando en la misma dirección, de igual amplitud y con frecuencias (y por ende números de onda) ligeramente distintos:

$$\eta = a \cos(k_1 x - \omega_1 t - \delta) + a \cos(k_2 x - \omega_2 t + \delta) \quad (\text{III-71})$$

donde las fases δ fueron arbitrariamente escogidas simétricas por conveniencia. Usando notación compleja.

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = a e^{i(k_1 x - \omega_1 t - \delta)} + a e^{i(k_2 x - \omega_2 t + \delta)} \quad (\text{III-72})$$

Si definimos

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2} \quad (\text{III-73})$$

o sea ω es el valor medio entre estas dos frecuencias cercanas y $\Delta\omega$ es la diferencia entre ω y cualquiera de estas frecuencias, ver figura III.14.

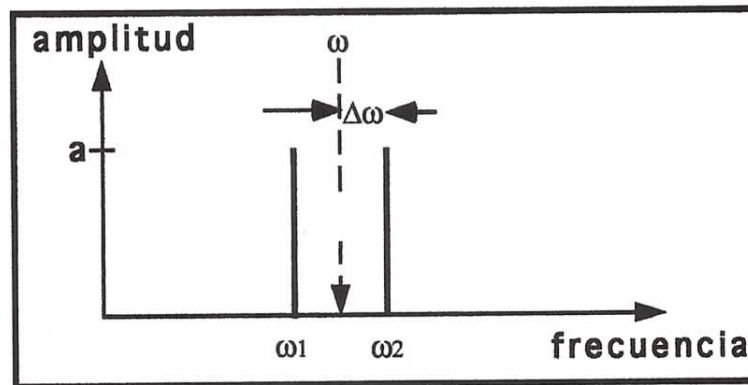


Fig.III.14. Componentes que forman un grupo de olas en el dominio de las frecuencias. Cada línea vertical gruesa representa una ola sinusoidal.

De igual manera, definamos

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \Delta k = \frac{|k_2 - k_1|}{2} \quad (\text{III-74})$$

Entonces

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_1 + \Delta\omega = \omega_2 - \Delta\omega \\ k &= k_1 + \Delta k = k_2 - \Delta k \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \omega - \Delta\omega & \omega_2 &= \omega + \Delta\omega \\ k_1 &= k - \Delta k & k_2 &= k + \Delta k \end{aligned} \right. \quad (\text{III-75})$$

y substituyendo en la ec.III-72

$$\begin{aligned}
\eta &= ae^{i(kx - \Delta kx - \omega t + \Delta \omega t - \delta)} + ae^{i(kx + \Delta kx - \omega t - \Delta \omega t + \delta)} \\
&= ae^{i(kx - \omega t)} e^{i(-\Delta kx + \Delta \omega t - \delta)} + ae^{i(kx - \omega t)} e^{i(\Delta kx - \Delta \omega t + \delta)} \\
&= \left[ae^{i(kx - \omega t)} \right] \left[2 \cos \left(\Delta kx - \Delta \omega t + \delta \right) \right] \quad (\text{III-76})
\end{aligned}$$

porque

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad (\text{III-77})$$

y tomando la parte real

$$\eta = \underline{\underline{2a \cos \left(\Delta k x - \Delta \omega t + \delta \right) \cos \left(kx - \omega t \right)}} \quad (\text{III-78})$$

donde la parte de doble subrayado representa una amplitud variable de una onda sinusoidal de frecuencia ω y número de onda k (compare con la ec.III-35). Esto se esquematiza en la figura III.15.

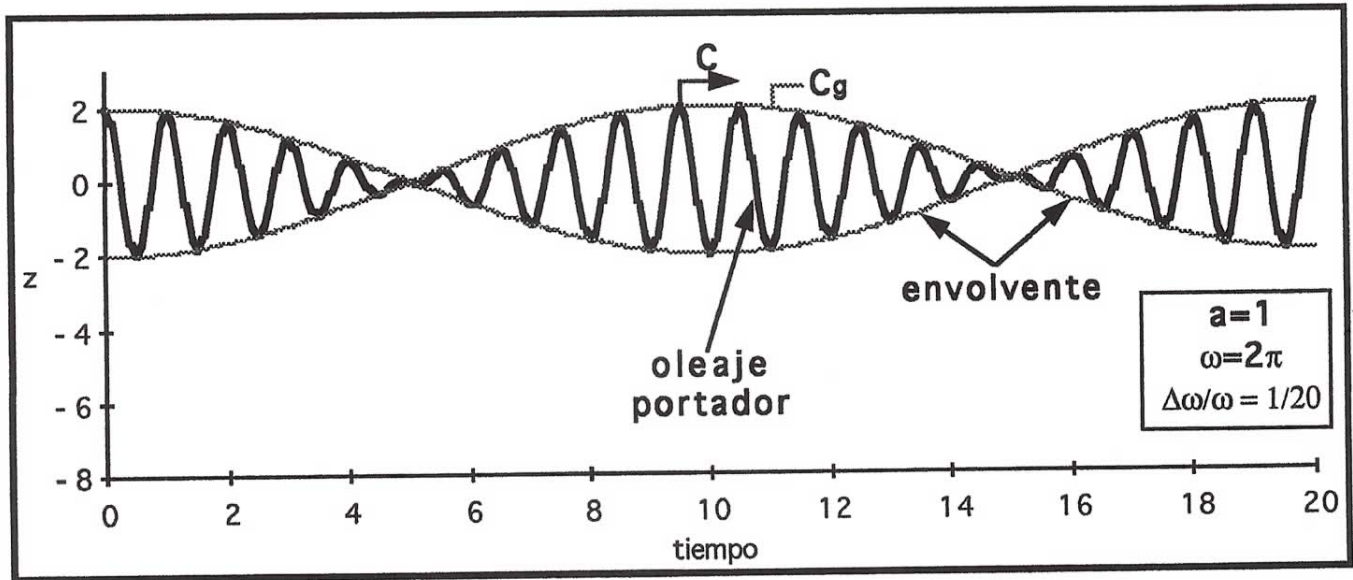


Fig.III.15. Gráfica de la evolución en el tiempo de la superficie libre en un punto fijo, al superponerse 2 componentes con frecuencias ligeramente distintas. Las unidades de z y t son arbitrarias. Una instantánea de la superficie libre para un instante fijo tendría una apariencia similar con el eje x en lugar del eje del tiempo.

Observe que como k_1 y k_2 son muy cercanas entre sí, entonces $k \gg \Delta k$ y en forma similar como ω_1 y ω_2 son parecidas tenemos que $\omega \gg \Delta\omega$.

Esto quiere decir que la amplitud variable (o *envolvente* de amplitud) es una variación de baja frecuencia y número de onda pequeño (período y longitud de onda grandes) comparando con el oleaje "portador" (nombre que se le da al oleaje aparente al observador casual de frecuencia ω y número de onda k). La figura III.16 muestra dos ejemplos de *grupos de olas* u *oleaje de amplitud modulada*, obtenido superponiendo 2 olas sinusoidales de frecuencia similar en un canal de laboratorio.

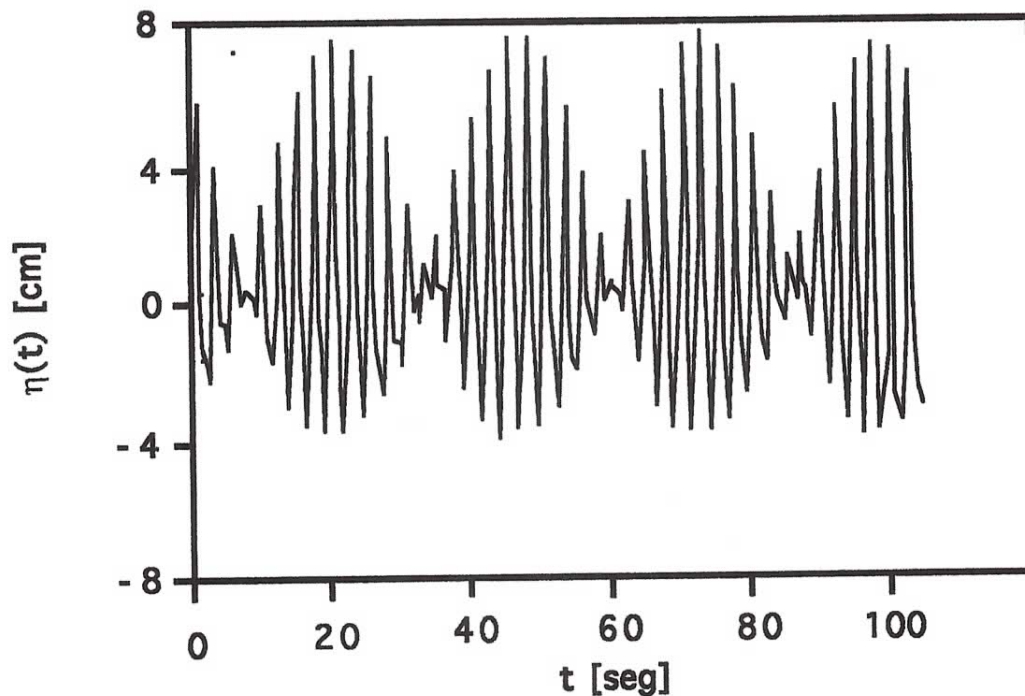


Fig.III.16. Oleaje obtenido con la superposición de 2 componentes frecuenciales de igual amplitud. El registro de variación de la superficie libre en el tiempo es experimental y corresponde a condiciones de laboratorio. La mayor agudez de crestas con respecto a valles (en olas portadoras y la envolvente) se deben a efectos no lineales, ver capítulo XI (fuente: Rosengaus 1987).

De la misma manera como una onda sinusoidal tiene una celeridad de avance $c = \omega / k$, la *envolvente* se mueve a una celeridad, llamada de *grupo* por razones obvias, definida por

$$C_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \left(\longrightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k} \text{ cuando } \Delta k \longrightarrow 0 \right) \quad (\text{III-79})$$

Derivando la expresión $\omega = (gk \tanh(kh))^{1/2}$ (ver ec.III-40) se obtiene

$$C_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{g}{2} (gk \tanh kh)^{-1/2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

$$= \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad \text{(III-80)}$$

donde se utilizó la ec.III-41 en el último paso.

Es importante notar que C_g no es igual a c , o sea la envolvente se mueve a diferente velocidad que la ola portadora. Por ejemplo para aguas profundas $C_g = c/2$, i.e. las olas portadoras avanzan 2 veces mas rápido que la envolvente, "desapareciendo" en el frente del grupo y "apareciendo" en la parte de atrás del grupo.

Para aguas someras $C_g = c$, o sea las ondas portadoras se mueven junto con el grupo.

III.7.4 Olas estacionarias y parcialmente estacionarias.

Veremos ahora que se obtiene al superponer 2 olas de igual frecuencia (y por ende igual número de onda) que viajan en direcciones opuestas. Dicha condición se da comunmente en las inmediaciones de muros o estructuras largas sobre las que incide oleaje monocromático en forma normal, puesto que la estructura misma refleja a la ola incidente y la hace avanzar en dirección contraria a la original. La figura III.17 esquematiza esto.

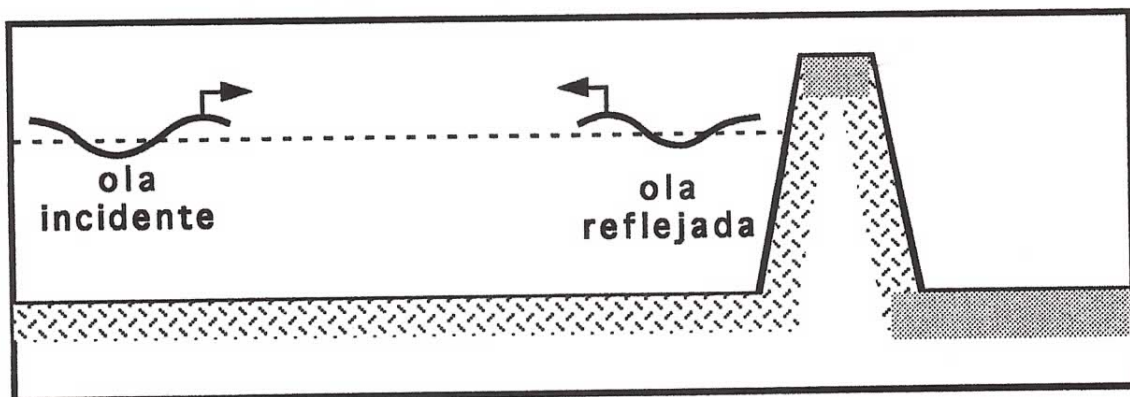


Fig.III.17. Esquema de una condición donde se formaría una onda (parcialmente) estacionaria por reflexión en la estructura.

Conforme mayor verticalidad tenga la cara sobre la que el oleaje incide (suponiendo una cara sólida y lisa) mayor será la reflexión, esto es, la amplitud de la ola reflejada se aproximará a la amplitud de la ola incidente.

Con una ola incidente (avanzando en la dirección +x) dada por

$$\eta_i = a_i \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III-81})$$

la ola reflejada estará definida por

$$\eta_r = a_r \cos(kx + \omega t + \delta_r) \quad (\text{III-82})$$

donde el cambio de signo en el segundo término del argumento del *coseno* implica una ola avanzando en la dirección -x y δ_r permite un cierto defasamiento de la ola reflejada con respecto a la incidente².

Usando identidades trigonométricas se obtiene que el desplazamiento compuesto de la superficie libre esta dado por

$$\eta = \eta_i + \eta_r = \left[a_i \cos(kx) + a_r \cos(kx + \delta_r) \right] \cos(\omega t) + \left[a_i \operatorname{sen}(kx) + a_r \operatorname{sen}(kx + \delta_r) \right] \operatorname{sen}(\omega t) \quad (\text{III-83})$$

Por el momento solo estamos interesados en un retrato de la magnitud máxima en el tiempo a lo largo del eje x. Puesto que se trata de 2 componentes $\pi/2$ fuera de fase (como las componentes real e imaginaria de un número complejo) la *magnitud* de esta variación temporal se obtiene como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las amplitudes entre [] de cada componente sinusoidal en el tiempo en la

2

El lector puede facilmente comprobar esto cambiando el signo al término kx y recordando que $\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$. Para el incrédulo en las matemáticas se recomienda el ejercicio de graficar la ec. III-82 para comprobar que la dirección de avance es -x.

ec.III-83.A esta amplitud (variable en x) la llamaremos $|\eta|$. Operando como se indicó se obtiene

$$\begin{aligned}
 |\eta| &= \left[a_1^2 + a_r^2 + 2a_1 a_r \left[\cos kx \cos(kx + \delta_r) - \sin kx \sin(kx + \delta_r) \right] \right]^{1/2} \\
 &= \left[a_1^2 + a_r^2 + 2a_1 a_r \cos(2kx + \delta_r) \right]^{1/2} \quad \text{(III-84)}
 \end{aligned}$$

que muestra una variación de la amplitud en el espacio de forma periódica con

$$|\eta|_{\min} = a_1 - a_r \quad \text{en los nodos} \quad 2kx + \delta_r = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots \quad \text{(III-85)}$$

$$|\eta|_{\max} = a_1 + a_r \quad \text{en antinodos} \quad 2kx + \delta_r = 0, \pm 2\pi, \dots \quad \text{(III-86)}$$

Los *nodos* son las localizaciones en el espacio (sobre el eje x) donde se presentan las mínimas variaciones del desplazamiento de la superficie libre, mientras que los *antinodos* son aquellas localizaciones donde se presentan las máximas variaciones. Nodos consecutivos están separados entre sí por una distancia $L/2$, y de los antinodos vecinos por $L/4$. La figura III.18 esquematiza la envolvente de la variación de la superficie libre, para el caso cuando $a_1 \neq a_r$.

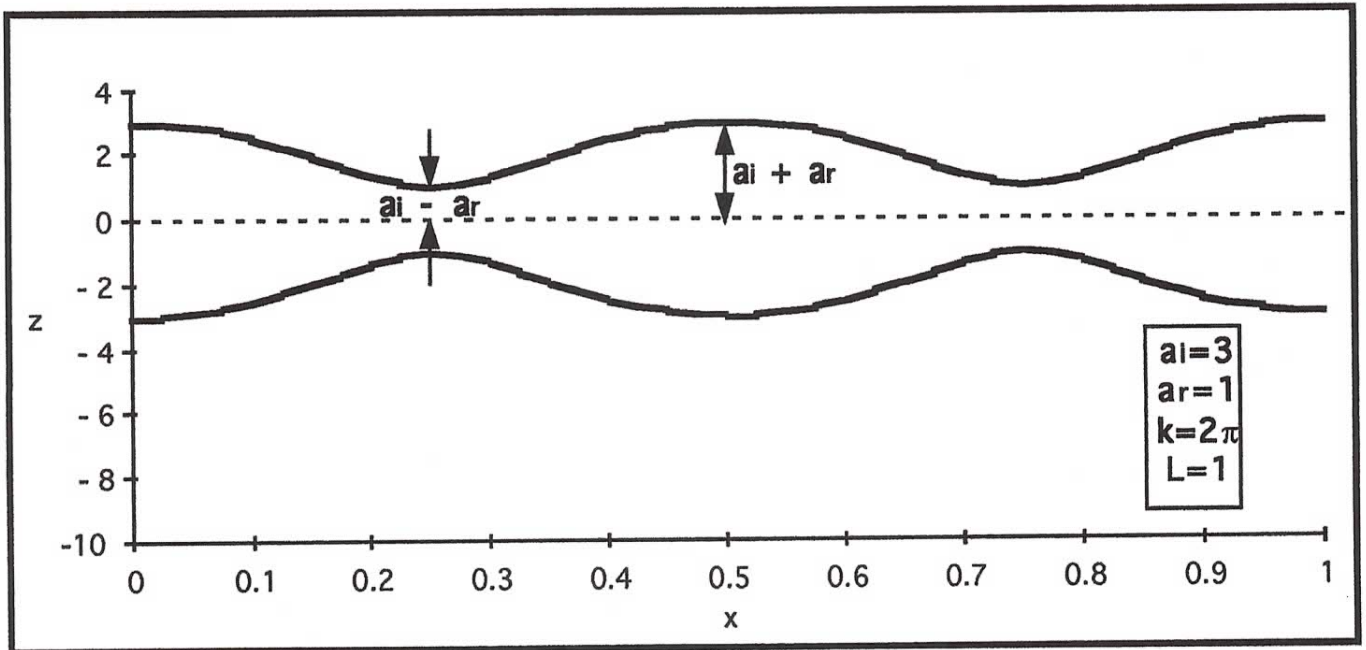


Fig.III.18. Variación en el espacio de la envolvente para el caso de una ola parcialmente estacionaria. La superficie libre mantiene un movimiento periódico siempre dentro de los límites marcados por la envolvente. Las unidades de z y x son arbitrarias.

En el caso de $a_i = a_r$, los nodos no presentan ninguna variación en el tiempo, de donde proviene el nombre de nodo, pues la superficie libre pasa por el mismo punto en todo momento. En cambio los antinodos alcanzan la variación máxima posible igual a $2a_i = 2a_r$. La figura III.19 esquematiza la envolvente de la superficie libre en este caso (los niveles máximos y mínimos en el tiempo).

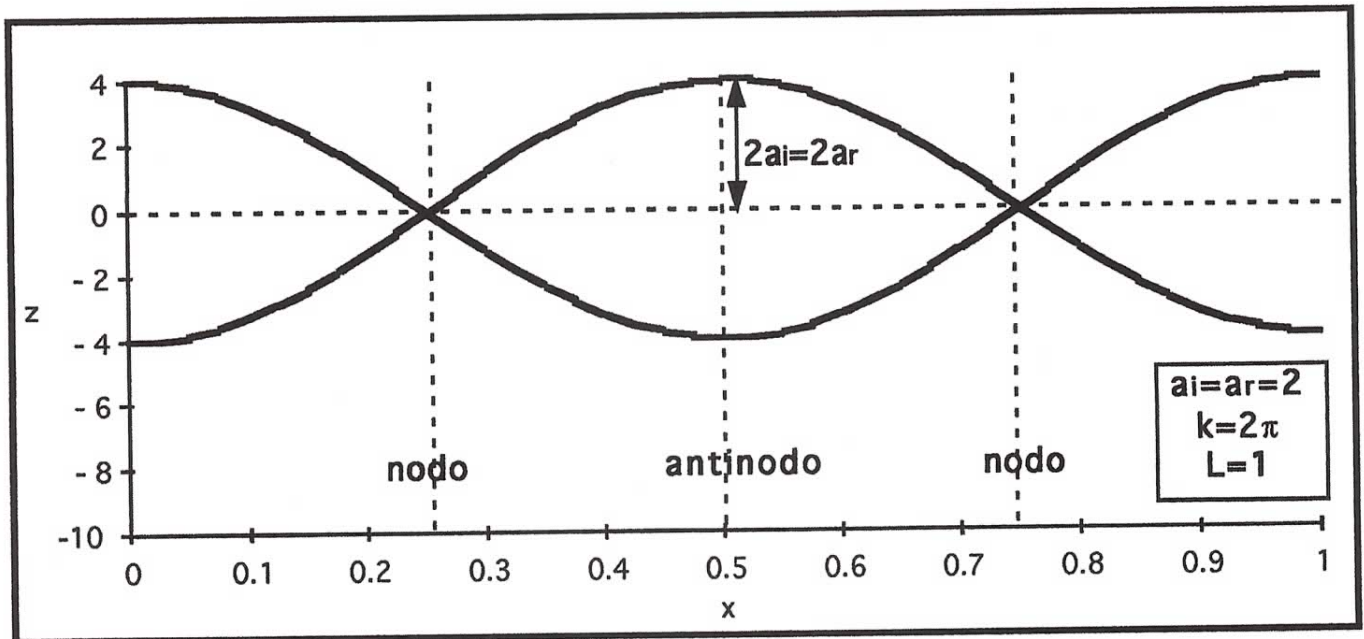


Fig.III.19. Variación en el espacio de la envolvente para una ola totalmente estacionaria. La superficie libre mantiene un movimiento periódico dentro de los límites marcados por la envolvente, sin desplazamiento en los nodos (ver también Fig.III.5). Las unidades de z y x son arbitrarias.

Para este último caso la localización de la superficie libre se describe como

$$\eta = 2 a_1 \cos (kx + \delta_r/2) \cos \omega t \quad (\text{III-87})$$

y la figura III.5 muestra dicha variación como los perfiles de la superficie libre para varios instantes que cubren medio periodo de oscilación. El otro medio periodo es similar pero en sentido contrario hasta alcanzar el estado original. Puesto que la onda no se desplaza en ninguna dirección, se llama a esta una *ola estacionaria*.

Hemos obtenido la ola estacionaria como la superposición de 2 ondas progresivas de igual frecuencia y amplitud. De la superposición se deduce que

$$\phi_{\text{onda est.}} = \phi_i + \phi_r \quad (\text{III-88})$$

$$\phi_i = \frac{a_i g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(kx - \omega t)$$

$$\phi_r = \frac{a_r g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(kx + \omega t + \delta_r)$$

de donde se puede obtener toda la cinemática del caso. El lector interesado puede comprobar que esta superposición lleva precisamente a la ec.III-37 con la posible diferencia del defasamiento δ_r .

El caso $a_i > a_r$ se puede considerar como una onda estacionaria de amplitud $2a_r$ superpuesta a una onda progresiva de amplitud $(a_i - a_r)$, razón por la que se denomina una *ola parcialmente estacionaria*.