

simultáneamente a uno de los registros de oleaje el movimiento del generador de olas). Sin embargo la combinación de fases,  $\theta_i - \theta_r$ , es de gran interés puesto que define la posición exacta de nodos y antinodos en el canal. El desfase de reflexión,  $\theta_r$ , se puede estimar para R pequeña suponiendo que  $\theta_i$  es igual a  $\theta_g$  usando el valor conocido de  $\delta$ . Estrictamente, la diferencia entre  $\theta_i$  y  $\theta_g$  requiere de medir simultáneamente el oleaje y el movimiento del generador.

Este método es, en general, muy preciso puesto que considera una gran cantidad de información sobre el movimiento del agua en el canal, minimizando el efecto de pequeños errores que se cometen en las mediciones en cada punto.

### IV.3.2 Método rápido.

El método anterior requiere muchas mediciones que requieren mucho tiempo a menos que se cuente con docenas de medidores de oleaje para medir en forma simultánea. Esto es inconveniente y en ciertos casos (como medición sobre fondo móvil con formas del fondo en proceso de desarrollo) no es factible garantizar constancia de condiciones durante este periodo largo de medición. Es necesario encontrar una manera más rápida de resolver olas incidentes y reflejadas.

Imaginemos registros temporales de oleaje tomados en dos estaciones cercanas  $x = x_1$  y  $x = x_2$ . Como los registros incluyen la onda incidente y la reflejada, en  $x = x_1$ .

$$\begin{aligned}
 \eta_1(t) &= a_i \cos(kx_1 - \omega t - \theta_i) + a_r \cos(kx_1 + \omega t + \theta_r) \\
 &= a_i \cos(\omega t - kx_1 + \theta_i) + a_r \cos(\omega t + kx_1 + \theta_r) \\
 &= \text{Real} \left\{ a_i e^{i(\omega t - kx_1 + \theta_i)} + a_r e^{i(\omega t + kx_1 + \theta_r)} \right\} \\
 &= \text{Real} \left\{ e^{i\omega t} \left[ a_i (e^{-ikx_1})(e^{i\theta_i}) + a_r (e^{ikx_1})(e^{i\theta_r}) \right] \right\} \quad \text{(IV-12)}
 \end{aligned}$$

donde debe diferenciarse el significado de el subíndice  $i$  (que indica *incidente*) de la unidad imaginaria  $i$  ( $=\sqrt{-1}$ ).

En forma similar en  $x = x_2$

$$\eta_2(t) = \text{Real} \left\{ e^{i\omega t} \left[ a_1 (e^{-ikx_2}) (e^{i\theta_1}) + a_r (e^{ikx_2}) (e^{i\theta_r}) \right] \right\} \quad (\text{IV-13})$$

Del registro temporal de oleaje en  $x=x_1$  se obtiene (a través de análisis de Fourier, por ejemplo con transformada rápida de Fourier o FFT) la amplitud y fase

$$\eta_1(t) = \alpha_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} \quad (\alpha_1, \phi_1, \text{ conocidos}) \quad (\text{IV-14})$$

y en  $x = x_2$

$$\eta_2(t) = \alpha_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} \quad (\alpha_2, \phi_2, \text{ conocidos}) \quad (\text{IV-15})$$

Igualando los miembros derechos de las ecs. IV-12 con IV-14 y IV-13 con IV-15, se obtiene

$$a_1 (e^{i\theta_1}) (e^{-ikx_1}) + a_r (e^{i\theta_r}) (e^{ikx_1}) = \alpha_1 e^{i\phi_1} \quad (\text{IV-16})$$

$$a_1 (e^{i\theta_1}) (e^{-ikx_2}) + a_r (e^{i\theta_r}) (e^{ikx_2}) = \alpha_2 e^{i\phi_2} \quad (\text{IV-17})$$

Definiendo las amplitudes complejas

$$\hat{a}_1 = a_1 e^{i\theta_1} \quad \hat{a}_r = a_r e^{i\theta_r} \quad (\text{IV-18})$$

las ecs. IV-16 y IV-17 se expresan como

$$\left[ e^{-ikx_1} \right] \hat{a}_1 + \left[ e^{ikx_1} \right] \hat{a}_r = \alpha_1 e^{i\phi_1} \quad (\text{IV-19})$$

$$\left[ e^{-ikx_2} \right] \hat{a}_1 + \left[ e^{ikx_2} \right] \hat{a}_r = \alpha_2 e^{i\phi_2} \quad (\text{IV-20})$$

sistema de ecuaciones lineales con incógnitas  $\hat{a}_1, \hat{a}_r$  que al resolverse (con la regla de Cramer) y substituir los valores de  $\hat{a}_1, \hat{a}_r$  (ec.IV-18) resulta en:

$$a_1^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos[(\phi_1 - \phi_2) + k(x_2 - x_1)]}{4\text{sen}^2 k(x_2 - x_1)} \quad (\text{IV-21})$$

$$\tan \theta_1 = \frac{-\alpha_1 \cos(\phi_1 + kx_2) + \alpha_2 \cos(\phi_2 + kx_1)}{\alpha_1 \text{sen}(\phi_1 + kx_2) - \alpha_2 \text{sen}(\phi_2 + kx_1)} \quad (\text{IV-22})$$

$$a_r^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos[(\phi_1 - \phi_2) - k(x_2 - x_1)]}{4\text{sen}^2 k(x_2 - x_1)} \quad (\text{IV-23})$$

$$\tan \theta_r = \frac{\alpha_1 \cos(\phi_1 - kx_2) - \alpha_2 \cos(\phi_2 - kx_1)}{-\alpha_1 \text{sen}(\phi_1 - kx_2) + \alpha_2 \text{sen}(\phi_2 - kx_1)} \quad (\text{IV-24})$$

que definen totalmente a  $\eta_1$  y  $\eta_r$ .

Este sistema tiene obvias limitaciones puesto que para combinaciones de oleaje y separación de sensores tales que

$$k\Delta x_g = k|x_2 - x_1| = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (\text{IV-25})$$

el denominador en las ecs IV-21 y IV-23 tiende a cero y no se obtiene solución (condición equivalente a  $\Delta x_g = 0, L/2, L, \dots$ ), puesto que ambos medidores *leen* la misma señal al estar separados por un múltiplo exacto de la periodicidad en el espacio de la envolvente de la ola parcialmente estacionaria, ver fig.IV.7.

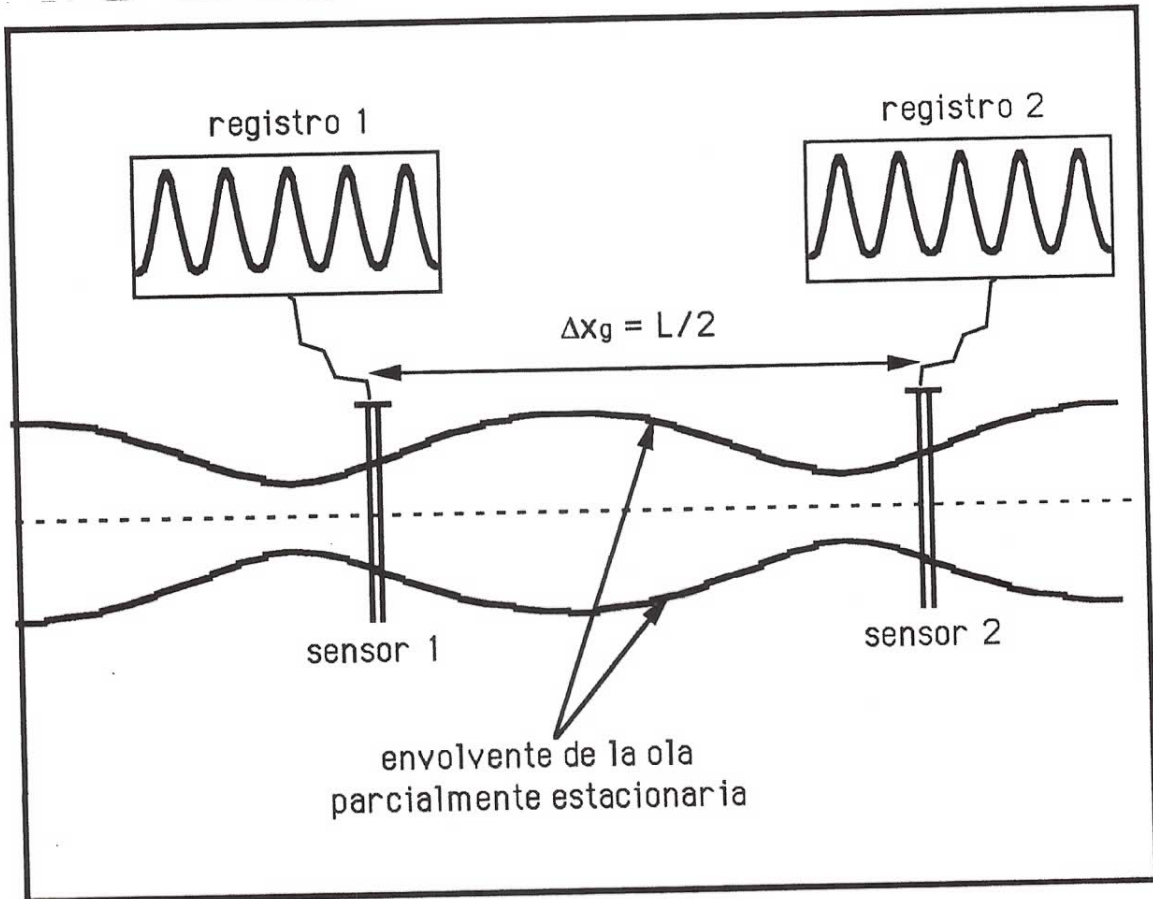


Fig.IV.7. Esquema que muestra las condiciones de falla del *método rápido* descrito, cuando ambos sensores miden una señal redundante.

Puesto que el método es *infinitamente* inexacto en  $k\Delta x_g = 0, \pi, 2\pi, \dots$  es de esperarse que cerca de estas condiciones el sistema sea impreciso (o sea que pequeños errores en las mediciones se amplifican mucho en el resultado final). De hecho un análisis de propagación de errores (ver Schenck, 1961) muestra que para las amplitudes  $a_i$  y  $a_r$  el sistema es aceptablemente preciso solamente en el rango

$$(m + 0.1) \leq \frac{k\Delta x_g}{\pi} \leq (m + 0.9) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IV-26})$$

ver Goda (1985) y Rosengaus (1987).

El método presume que la distancia  $\Delta x_g$  es suficientemente corta para

que solo haya despreciables pérdidas de energía del oleaje entre los sensores, por lo que, en la práctica,  $m$  debe restringirse a un entero pequeño en la ec.IV-26.

El rango útil del sistema puede ser ampliado en forma significativa midiendo con 3 sensores y usándolos por parejas con  $\Delta x_{g1-2} \neq \Delta x_{g1-3} \neq \Delta x_{g2-3}$  obteniendo 3 estimados (uno de cada par). Cuando un par se encuentra en el rango *ciego*, los otros no lo están (ver Rosengaus 1987).

El método descrito también puede utilizarse para *resolver* las olas incidentes de las reflejadas para oleaje multicromático, separando cada componente frecuencial por medio de un análisis de Fourier.

#### IV.4 TEORIA LINEAL DE GENERACION DE OLAJE.

Imaginemos un canal unidimensional de oleaje y, por generalidad, la paleta del generador de oleaje en uno de sus extremos con una amplitud de su movimiento armónico en el tiempo siendo una función arbitraria de  $z$ ; y sea  $\xi_0(z)$  dicha variación con la profundidad de la amplitud del movimiento oscilatorio del generador, ver fig.IV.8.

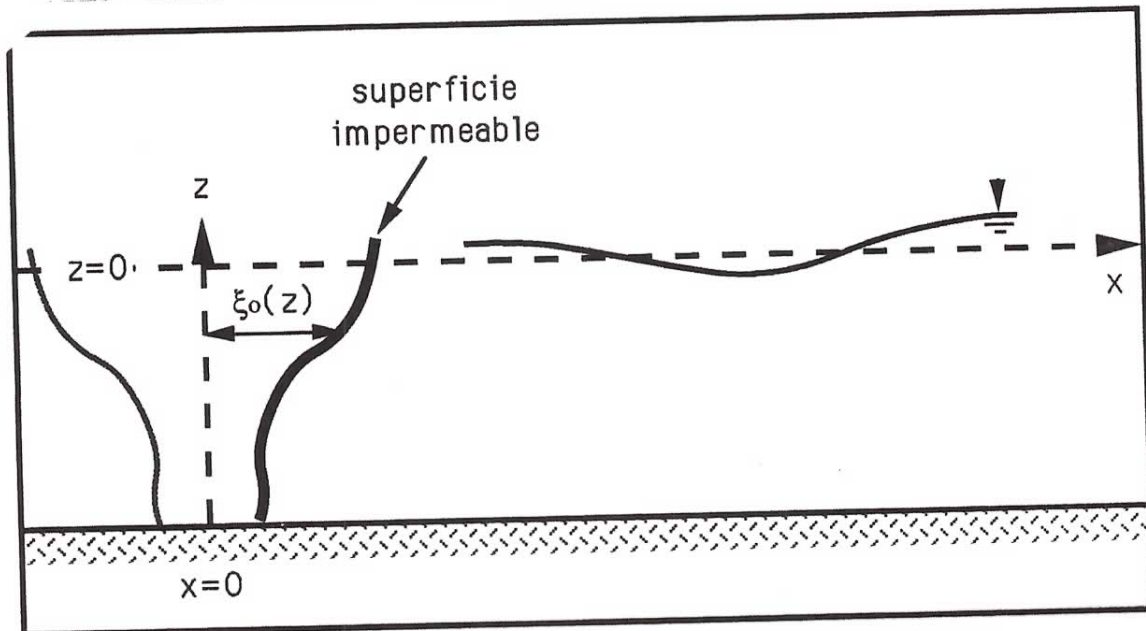


Fig.IV.8. Esquema de una paleta de generación de oleaje arbitraria.

La posición instantánea del generador esta dada por

$$x_{\text{generador}} = \xi(z,t) = \xi_0(z) \text{ sen } \omega t \quad (\text{IV-27})$$

Las ecuaciones gobernantes (linealizadas) son las mismas que antes, ver secc.II.3.6

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h < z < 0 \quad (\text{IV-28})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (\text{IV-29})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad z = 0 \quad (\text{IV-30})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad z = 0 \quad (\text{IV-31})$$

pero ahora necesitamos aumentar condiciones de frontera laterales, ver seccs. II.3.5 y II.3.7

$$\phi \text{ finito y radiante} \quad \text{en } x \rightarrow \infty \quad (\text{IV-32})$$

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{en} \quad x = \xi(z,t) \quad (\text{IV-33})$$

la última condición se traduce (utilizando la ec.IV-27) en

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \xi_0(z) \omega \cos \omega t \quad \text{en} \quad x = \xi(z,t) \quad (\text{IV-34})$$

Pero haciendo una expansión en serie de Taylor alrededor de la posición media del generador de olas,  $x=0$ , y comparando los ordenes de magnitud de los términos sucesivos para las condiciones ya supuestas de teoría lineal de oleaje, la condición linealizada es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \xi_0(z) \omega \cos(\omega t) \quad x = 0 \quad (\text{IV-35})$$

Si buscamos una solución por separación de variables periódica en el tiempo

$$\phi(x,z,t) = X(x) Z(z) T(t) \quad (\text{IV-36})$$

con  $T(t) = \text{sen}(\omega t)$ ,  $\text{cos}(\omega t)$  o alguna combinación lineal de ellas (puesto que se busca una solución periódica en el tiempo; substituyendo en la ecuación de Laplace (ec.IV-28),

$$Z(z) T(t) X''(x) + X(x) T(t) Z''(z) = 0 \quad (\text{IV-37})$$

de donde se deduce que

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k^2 \quad (\text{IV-38})$$

donde, al igual que en el capítulo anterior, ambos miembros solo pueden ser iguales a una constante,  $k^2$  en este caso. De aquí

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \quad (\text{IV-39})$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 Z = 0 \quad (\text{IV-40})$$

cuyas posibles soluciones son:

para  $k^2 > 0$  ( $k$  real)

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos kx + B \sin kx \\ Z(z) &= C e^{kz} + D e^{-kz} \end{aligned} \quad (\text{IV-41})$$

para  $k^2 = 0$

$$\begin{aligned} X(x) &= Ax + B \\ Z(z) &= Cz + D \end{aligned} \quad (\text{IV-42})$$

para  $k^2 < 0$  ( $k$  imaginario)

$$\begin{aligned} X(x) &= A e^{|k|x} + B e^{-|k|x} \\ Z(z) &= C \cos |k|z + D \sin |k|z \end{aligned} \quad (\text{IV-43})$$

donde  $|k|$  se refiere a la magnitud del número complejo (en este caso un imaginario puro) y A,B,C y D son constantes arbitrarias.

La solución original para ondas progresivas se asocia al caso para  $k^2 > 0$ , por lo que dicha solución tiene el mismo carácter que ya fué estudiado en el capítulo III. Más importante aquí es interpretar físicamente los otros dos casos, para  $k^2 = 0$  y  $k^2 < 0$  e identificar su diferente carácter.

Aprovechando nuestra experiencia anterior en el caso  $k^2 > 0$  y obligando a cumplir con la condición de frontera de fondo, se propone una solución general de la forma:

$$\begin{aligned} \phi(x,z,t) &= A \cosh k_p(z+h) \sin(k_p x - \omega t) \\ &+ \left( B_1 x + B_2 \right) \\ &+ C e^{-k_s x} \cos k_s(h+z) \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{IV-44})$$



donde  $k_s = |k|$  = magnitud del  $k$  imaginario supuesto  
 = número de onda de la onda estacionaria

$k_p$  = número de onda de la onda progresiva

y la forma específica del segundo y tercer términos es compatible con las ecs.IV-42 y IV-43, al cumplir con la ec.IV-29 (los detalles se dejan como ejercicio al lector). El término  $e^{k_s x}$  no se incluye (o sea su coeficiente se hace cero), para mantener la solución finita cuando  $x \rightarrow \infty$ , ec.IV-32.

Nótese el diferente caracter del segundo término (no periódico). Este término representa una corriente unidireccional uniforme en la vertical (porque  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = B_1 = \text{constante}$ ) misma que no se puede dar físicamente por conservación de masa en un canal cerrado por un extremo (el extremo  $x=0$ ) por lo que hacemos  $B_1 = 0$ .  $B_2$  puede tener un valor arbitrario pues no afecta al campo de velocidades, por lo que por conveniencia hacemos  $B_2 = 0$

El tercer término también tiene un caracter diferente. De nuestra experiencia en el capítulo III (ver seccs. III.3 y III.7.4) vemos que este tercer término representa una ola estacionaria pero afectada por un factor exponencialmente decreciente conforme la distancia al generador ( $x$ ) aumenta. Puesto que para una distancia relativamente corta del generador su efecto es ya despreciable, esta componente de la solución es llamada el *modo evanescente*.

El resto de la solución debe cumplir con las dos condiciones de superficie libre o alternativamente

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (\text{IV-45})$$

de lo que se obtiene

$$\omega^2 = g k_p \tanh k_p h \quad (\text{IV-46})$$

que es la relación de dispersión para la onda progresiva, y

$$\omega^2 = -g k_s \tan k_s h \quad (\text{IV-47})$$

que establece una relación entre  $\omega$  y  $k_s$ . Esta última se puede expresar como

$$\frac{\omega^2 h}{g k_s h} = -\tan k_s h \quad (\text{IV-48})$$

que debido a la periodicidad de la función *tangente* tiene un número infinito de soluciones, como se muestra en la fig.IV.9.

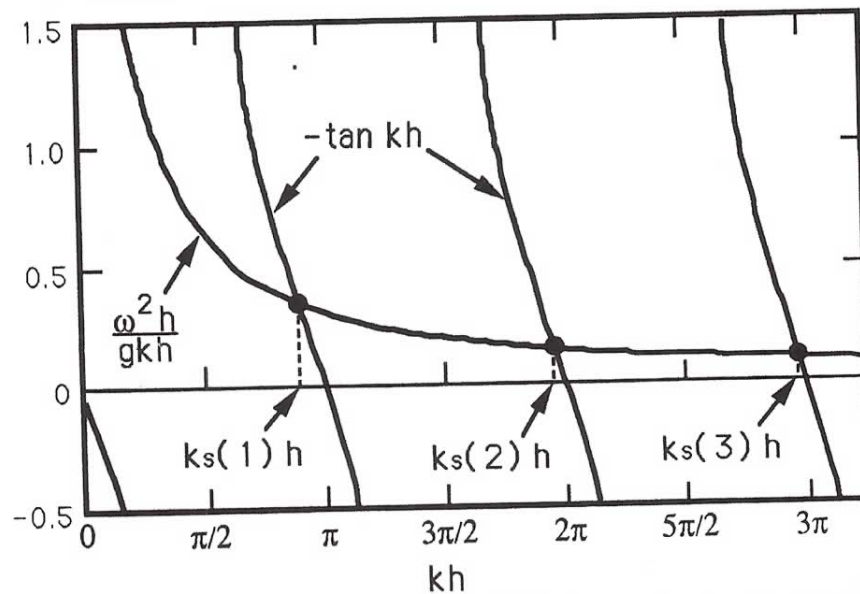


Fig.IV.9. Diagrama que muestra las múltiples soluciones de la ec. IV-48, en este caso para  $\omega h/\sqrt{g} = 1.0$  (fuente: Dean y Dalrymple, 1984).

Para incluir todas estas soluciones, cada una de ellas caracterizada por el subíndice "n" re-escribimos la solución como

$$\phi(x,z,t) = A \cosh k_p(z+h) \sin(k_p x - \omega t)$$

