

$$df_D = 2 \int_0^{\theta_s} \frac{\rho u_\infty^2}{2} (1-4\text{sen}^2\theta) a \cos\theta d\theta +$$

$$2 \int_{\theta_s}^{\Pi} p_{\text{estela}} a \cos\theta d\theta =$$

$$\rho u_\infty^2 a \left[ \int_0^{\theta_s} (1-4\text{sen}^2\theta) \cos\theta d\theta + \int_{\theta_s}^{\Pi} \frac{p_{\text{estela}}}{\rho u_\infty^2 / 2} \cos\theta d\theta \right]$$

(IX-19)

El término en paréntesis rectangular en las últimas dos líneas de la ec. IX-19 es una función de  $R$  y de la rugosidad superficial de la pila, permitiéndonos concentrarlo todo en un coeficiente denominado el coeficiente de arrastre,  $C_D$ , a ser obtenido experimentalmente, con lo que para pilas circulares ( $D=2a$ )<sup>1</sup>

$$df_D = C_D \rho D \frac{u_\infty^2}{2}$$

(IX-20)

Nótese que  $D$ , el diámetro de la pila es también la proyección, en sentido normal al flujo, del volumen unitario de pila, por lo que la ec. IX-20 puede escribirse como

$$df_D = C_D \rho \frac{A u_\infty^2}{2}$$

(IX-21)

que en esta forma es válida para cualquier otra sección de la pila e inclusive cualquier otra geometría, de interpretarse  $A$  como el área proyectada sobre un plano normal al flujo.  $C_D$  para superficies lisas puede observarse en la fig. IX.6.

<sup>1</sup> El subíndice  $D$  proviene de la palabra "drag", o arrastre en idioma inglés.

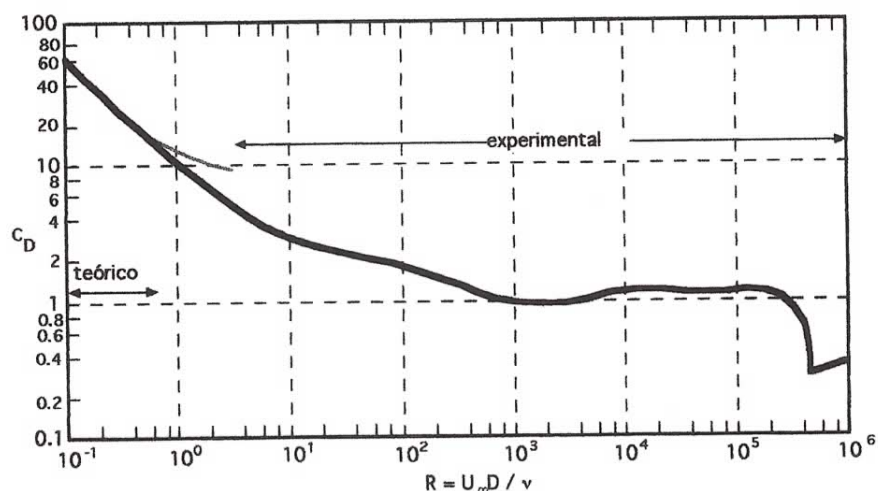


Fig.IX.6. Coeficiente de arrastre  $C_D$  como función del número de Reynolds. Fuente: Dean y Dalrymple (1984).

Para la variación de  $C_D$  con la rugosidad superficial de la pila, se refiere al lector al Shore Protection Manual (1984) y otros textos mas especializados. Las mismas referencias permiten obtener valores de  $C_M$ .

En el caso de una pila inmersa en un flujo real, la componente de fuerza producida por la aceleración del flujo,  $df_I$ , es igual a la del caso de un flujo potencial, ecs. IX-15 o IX-16.

La fuerza por unidad de longitud de la pila se puede considerar como la adición de ambas aportaciones (arrastre e inercia)

$$df = df(z, t) = df_D + df_I \quad (IX-22)$$

$$= \frac{1}{2} C_D \rho A u |u| + C_M \rho V \frac{Du}{Dt}$$

llamada la ecuación de Morison (1950), donde, por brevedad,  $u$  se refiere a la velocidad del flujo oscilatorio no afectado por la pila ( $u_\infty$  en los desarrollos anteriores) y  $u|u|$  se usa en lugar de  $u^2$  para asegurar que la dirección de la fuerza de arrastre sea igual a la dirección del flujo instantáneo. Nótese que para un flujo como el inducido por oleaje las  $df$ 's

no son solo variables (armónicas) del tiempo  $t$ , sino también de la posición vertical  $z$ .

La fuerza total sobre una pila se obtiene con la integración vertical de  $df$

$$f = \int_{-h}^{\eta} df = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} C_D \rho D u |u| dz + \int_{-h}^{\eta} \rho C_M V \frac{Du}{Dt} dz \quad (\text{IX-23})$$

Esta integral no puede integrarse fácilmente en forma analítica puesto que  $C_D$  y  $C_M$  varían con  $z$ . En la práctica, para olas de diseño, generalmente se usa teoría de Stokes de 5° orden para las expresiones de  $u$ , considerándose tanto la aceleración local como la convectiva en  $\frac{Du}{Dt}$ . Es importante puntualizar que de usarse valores de  $C_D$  y  $C_M$  no obtenidos experimentalmente sobre la estructura (o un modelo a escala) debe utilizarse la misma teoría que en el estudio para la obtención de  $C_D$  y  $C_M$  al cual se hace referencia<sup>2</sup>.

Si se usa teoría lineal, y para ser congruentes, se integra de  $z=-h$  hasta  $z=0$  solamente, y se utiliza aceleración local  $\frac{\partial u}{\partial t}$  en lugar de  $\frac{Du}{Dt}$ . Si además se usan valores de  $C_D$  y  $C_M$  constantes, la integración analítica resulta en

$$f = \frac{\rho C_D D H^2 g}{4 \sinh 2kh} \left( \frac{2kh + \sinh 2kh}{4} \right) \cos(kx_1 - \omega t) |\cos(kx_1 - \omega t)| + C_M \frac{\rho \pi D^2}{4k} \frac{H}{2} \omega^2 \sin(kx_1 - \omega t) \quad (\text{IX-24})$$

donde  $x_1$  se refiere a la coordenada  $x$  del centro de la pila, conveniente y

<sup>2</sup> En este tipo de estudios, la teoría en cuestión se utiliza normalmente para obtener las velocidades y aceleraciones a partir de mediciones de  $\eta$ .

usualmente considerada igual a cero<sup>3</sup>.

De usarse valores constantes de  $C_D$  y  $C_M$  para cálculos preliminares, tiene cierta lógica el usar los valores para la amplitud (o valor máximo durante el ciclo) de la velocidad y para la altura media de la superficie libre  $z=0$ , o sea calcular  $C_D$  y  $C_M$  con el valor  $U(z=0)$ , puesto que se buscan valores máximos y la aportación máxima se da concentrada alrededor de  $z=0$ . Esto es aún mas marcado en el cálculo del momento sobre el fondo que se calcula como

$$M(t) = \int_{-h}^{\eta} (h+z) df \quad (IX-25)$$

### IX.2.3 Sobre la medición experimental de $C_D$ y $C_M$ .

Si se instrumenta una pila o una sección de ella para medir simultáneamente fuerza y velocidad horizontal del fluido (o desplazamiento de la superficie libre usando alguna teoría como la lineal o la de Stokes 5° orden para obtener  $u(z,t)$ , conocido  $\eta(t)$ ) se pueden obtener experimentalmente los valores de  $C_D$  y  $C_M$ . Sin embargo son 2 incógnitas para una sola ecuación (la ec. de Morison) y podría pensarse que no es posible obtener ambas. Nótese que el término de fuerza de arrastre es máximo cuando  $u(t)$  es máximo (o sea  $\cos \omega t = 1$ ) y en este instante la aceleración  $\partial u/\partial t$  es cero ( $\sin \omega t = 0$ ) por lo que los valores para este instante pueden ser utilizados para calcular  $C_D$ . Esto ocurre cuando la cresta (o el valle) se encuentra en la posición de la pila, y para este instante la fuerza medida es puramente de arrastre. La situación se invierte 1/4 de ciclo después (o antes) y los valores medidos en el instante de velocidad = 0 (aceleración máxima) se pueden utilizar para obtener  $C_M$ . Este caso ocurre cuando  $\eta(x,t)$  tiene cualquiera de sus cruces con  $z=0$  alineados con la posición de la pila, y para estos instantes la fuerza medida es puramente de inercia. Así pues un registro contínuo de fuerza y velocidad del fluido (o alternativamente el desplazamiento de la

<sup>3</sup> Cuando se trata de un problema de evaluación de fuerzas sobre una sola pila aislada. En el caso de un sistema de pilas, solo la posición de una de ellas puede ser considerada como  $x=0$ .



superficie libre) es suficiente para calcular los valores tanto de  $C_D$  como de  $C_M$  para la geometría de la pila en cuestión.

Consideraciones importantes al hacer un estudio de este tipo son:

- a) Los valores  $C_D$  y  $C_M$  son de alguna manera promedios en  $z$  de la sección instrumentada.
- b) Los valores  $C_D$  y  $C_M$  representan los valores adecuados para máxima amplitud de velocidad y aceleración y no son estrictamente representativos de todo el ciclo. Esto es especialmente importante en el caso de  $C_D$  pues el grado de separación del fluido en la parte posterior de la pila para formar la estela depende obviamente de la parte del ciclo de la ola en la que se encuentre.
- c) Los valores de  $C_D$  y  $C_M$  se ven afectados por la teoría de oleaje utilizada para calcular  $u(z,t)$  de la  $\eta(t)$  medida (cuando esto es aplicable) y deben ser utilizados posteriormente en conjunción con esta misma teoría. De otra forma los valores de  $C_D$  y  $C_M$  serán inadecuados pues contendrán también efectos de las diferencias entre las dos teorías utilizadas.
- d) Algunas geometrías de pilas pueden estar muy mal condicionadas para obtener valores precisos de  $C_M$  o de  $C_D$  cuando una de las fuerzas (de arrastre o inercia) domina fuertemente sobre la otra. En este sentido se refiere al lector a Dean y Darlrymple (1984). Las condiciones de dominancia se tratan mas adelante en la secc. IX.2.5.
- e) Este método simplificado no es fácil de aplicar para mediciones de campo, donde el oleaje no es monocromático ni controlado. En estos casos un método de minimización de error presentado en Dean y Darlrymple (1984) es recomendable.

#### IX.2.4 Fuerza máxima durante un ciclo

Puesto que los máximos de las fuerzas de arrastre y de inercia no se dan al mismo tiempo, se presenta la incógnita de cuál es y en qué momento

durante el ciclo se presenta la máxima fuerza que es una combinación de ambas. La fuerza total se puede expresar como

$$f = F_D \cos \omega t |\cos \omega t| + F_I \sin \omega t \quad (\text{IX-26})$$

donde  $F_D$  y  $F_I$  son las amplitudes de la variación periódica de  $f_D$  y  $f_I$  y dependen de la teoría de oleaje y simplificaciones usadas (ver sección IX.2.2). Por ejemplo para teoría lineal y  $C_D$  y  $C_M$  constantes

$$F_D = \frac{\rho C_D D H^2 g}{4 \sinh 2kh} \left( \frac{2kh + \sinh 2kh}{4} \right) \quad (\text{IX-27})$$

$$F_I = C_M \frac{\rho \pi D^2}{4k} \frac{H}{2} \omega^2 \quad (\text{IX-28})$$

Graficando la variación compuesta de ambas componentes se puede observar que el máximo se presenta en la parte del ciclo donde  $\cos \omega t > 0$  por lo que para efectos de maximización

$$f = F_D \cos^2 \omega t + F_I \sin \omega t \quad (\text{IX-29})$$

que derivando e igualando a cero produce

$$\frac{df}{dt} = -2 F_D \omega \cos \omega t \sin \omega t + F_I \omega \cos \omega t = 0 \quad (\text{IX-30})$$

Esta ecuación tiene 2 posibles raíces; la primera, dividiendo ambos lados entre  $\omega \cos \omega t$  indica un máximo para

$$\sin \omega t = + \frac{F_I}{2F_D} \quad (\text{IX-31})$$

con un valor

$$f_{\max 1} = F_D + \frac{F_I^2}{4F_D} \quad (\text{IX-32})$$

Nótese que el valor específico y su ubicación dentro del ciclo depende de la magnitud relativa de  $F_I$  y  $F_D$ . La otra raíz se da para

$$\cos \omega t = 0 \quad (\text{IX-33})$$

punto en el ciclo en el que la fuerza de arrastre es cero, por lo que

$$f_{\max 2} = F_I \quad (\text{IX-34})$$

Este máximo se da solamente cuando  $F_I > 2F_D$ . Una gráfica ejemplificando la variación de fuerza total durante un ciclo se puede observar en la fig. IX.7.

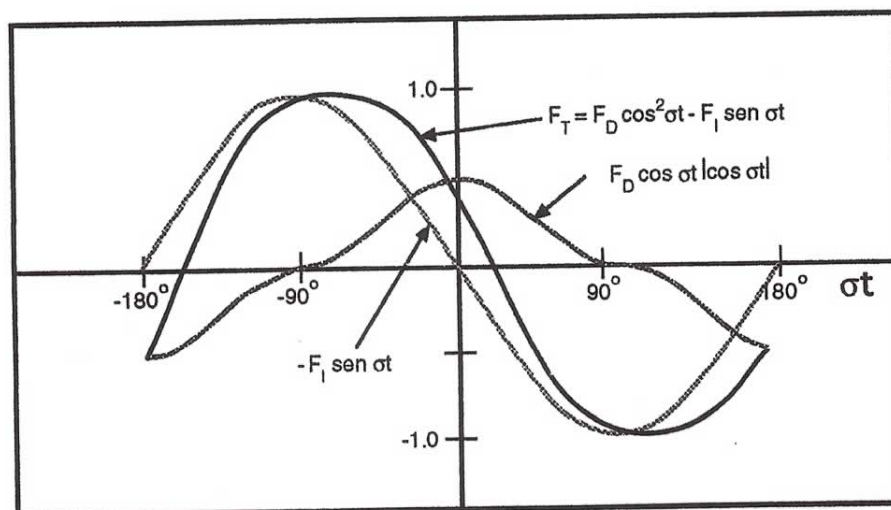


Fig. IX.7. Combinación de fuerzas de inercia y de arrastre sobre una pila para el caso específico de  $F_I = 2 F_D$ . Fuente: Dean y Dalrymple (1984).

#### IX.2.5 Importancia relativa de fuerzas de arrastre y de inercia.

Intuitivamente se espera que, cuando el diámetro de la estructura es grande comparado con la longitud de onda (pero no suficiente para producir reflexión-difracción apreciable) existe poca separación de flujo en la parte posterior y la fuerza de arrastre es poco importante con respecto a

la de inercia. Para pilas pequeñas es de esperarse una importancia mayor de la fuerza de arrastre.

Los valores máximos de  $df_I$  y  $df_D$ , expresados en términos de la amplitud de la velocidad,  $U$ , tiene una relación

$$\frac{dF_I}{dF_D} = \frac{1}{2} \frac{C_M}{C_D} \Pi^2 \left( \frac{D}{U T} \right) = \frac{\Pi}{2} \frac{C_M}{C_D} \left( \frac{D}{A_x} \right) \quad (\text{IX-35})$$

donde  $A_x$  es la excursión máxima de las partículas de fluido de su posición media al nivel  $z$  donde  $U$  (y por ende  $C_M$  y  $C_D$ ) es considerada.

El número de Keulegan-Carpenter,  $UT/D$ , o en forma equivalente la relación  $A_x/D$ , indican la importancia relativa de las fuerzas de arrastre y de inercia; valores grandes indican dominancia de fuerzas de arrastre, mientras valores pequeños indican dominancia de fuerzas de inercia (nótese que  $C_M$  y  $C_D$  son de  $\mathcal{O}(1)$ ). El valor límite razonable para considerar dominancia de uno u otro tipo de fuerza es 1 para  $A_x/D$  o alternativamente  $2\Pi$  para  $UT/D$ , o sea

$$\frac{U I}{D} \left\{ \begin{array}{l} \ll 2\Pi \quad \text{inercia dominante} \quad 1 \gg \\ \gg 2\Pi \quad \text{arrastre dominante} \quad 1 \ll \end{array} \right\} \frac{A_x}{D} \quad (\text{IX-36})$$

## IX.2.6 Fuerzas transversales sobre pilas.

Hasta este momento hemos considerado solo fuerzas alineadas con la dirección de propoagación del oleaje, ya que sin asimetrías en el flujo alrededor de la pila son las únicas que se presentan. Sin embargo, para números de Reynolds altos ( $5 \times 10^5$ ) empiezan a formarse vórtices alternantes a cada lado de la pila que son arrastrados en dirección del flujo en la estela. Esto produce asimetrías en la distribución de presiones misma que lleva a la existencia de fuerzas laterales alternantes. Estas fuerzas se manejan en general en forma análoga a la de arrastre con un coeficiente  $C_L$  empírico.



$$dF_L = C_L \frac{\rho D}{2} U^2 \quad (\text{IX-37})$$

donde el subíndice L proviene de la palabra sustentación en inglés (*lift*) por la analogía a las fuerzas que actúan en alas de aviones en dirección normal al flujo (asimétrico) alrededor de ellas. Este tipo de fuerzas también son de gran importancia en el diseño de tubos sobre el lecho del mar donde la presencia del fondo produce el flujo (y por ende distribución de presiones) con asimetría.

El número de Strouhal

$$S = \frac{n D}{U} \quad (\text{IX-38})$$

es usado para caracterizar este tipo de fenómenos, donde n es la frecuencia en hertz (ciclos/seg) a la que se separan los vórtices. Estudios experimentales muestran que para  $Re > 10^4$ ,  $S = \text{constante} = 0.2$ , por lo tanto el período de formación de vórtices  $T_{\text{vórtice}}$  es

$$T_{\text{vórtice}} = \frac{1}{n} = \frac{5 D}{U} \quad (\text{IX-39})$$

de donde se puede deducir que si el período del oleaje cumple

$$T \ll \frac{5 D}{U} = T_{\text{vórtice}} \quad (\text{IX-40})$$

entonces no existe suficiente permanencia del flujo en una dirección para formar ni un vórtice, o sea este efecto es despreciable. En cambio, para

$$T \gg \frac{5 D}{U} = T_{\text{vórtice}} \quad (\text{IX-41})$$

se llegan a formar los vórtices y su efecto es importante. Un comportamiento transicional es de esperarse para los casos en que T es del mismo orden que  $T_{\text{vórtice}}$ .

Recuerde que de igual manera como la fuerza máxima se calculó superponiendo fuerzas de arrastre y de inercia, la fuerza máxima resultante, cuando existen asimetrías en el flujo, debe considerar las

fuerzas laterales y esta resultante máxima no actúa necesariamente en la dirección del oleaje.

### IX.2.7 Variaciones sobre el tema.

Comentaremos ahora sobre varias limitaciones y variaciones sobre lo que se ha visto en esta sección IX.2.

- a) En la teoría vista no se considera ningún efecto de la estructura sobre el oleaje. Esto es una suposición aceptable para estructuras relativamente pequeñas con respecto a la longitud de onda. Sin embargo para estructuras grandes, estas afectan al oleaje debido a la reflexión y difracción. En estos casos los efectos de un fluido real son despreciables y existen soluciones analíticas basadas en flujo potencial que consideran esto. La existencia de esta perturbación del oleaje produce diferencias apreciables en la distribución de presiones alrededor de la estructura y por ende en las fuerzas que actúan sobre ella. Se refiere el lector interesado a Dean y Dalrymple (1984) y para un tratamiento más avanzado a Mei (1983).
- b) En la teoría vista no se considera la respuesta dinámica de la estructura a la excitación producida por el oleaje y su efecto sobre el oleaje en sí. Esto puede ser importante para estructuras con respuestas con períodos natural cercano al del oleaje de excitación, incluyendo estructuras flotantes ancladas y pilas largas y flexibles.
- c) En realidad el oleaje excitante es espectral y se puede atacar el problema de las fuerzas sobre las estructuras e inclusive su respuesta dinámica desde el punto de vista espectral. Aún cuando se acostumbra diseñar estructuras para una ola monocromática de diseño, el enfoque espectral es muy importante para estudios de fatiga.
- d) Se hizo el análisis de una sola pila aislada. Lo mas común es que una misma estructura este soportada por varias pilas. La fuerza máxima sobre la estructura no es la suma de las fuerzas máximas sobre cada pila, salvo en raras ocasiones. En estos casos, y aún cuando las pilas se encuentren suficientemente separadas para no interferir con el