

## V. ENERGIA DE OLEAJE Y SU PROPAGACION.

La simple observación del oleaje indica que el fluido tiene una cierta energía. Al estar en movimiento, obviamente, posee energía cinética. Pero además, el hecho de que la superficie libre se encuentra desplazada de su condición de equilibrio estático y que existe una fuerza restauradora (gravedad o tensión superficial según el caso) indica que además posee una cierta energía potencial.

Es obvio que una columna del fluido con área de superficie unitaria tiene una energía (potencial o cinética) variable en el tiempo, aún para olas de amplitud constante. Esta energía instantánea no es de mucho interés, sino la energía promedio contenida en ese estado de oleaje. Para olas monocromáticas (de frecuencia única y constante) este promedio debe hacerse en un número entero de períodos (o en un solo período por simplicidad).

### V.1 ENERGIA ESPECIFICA.

La energía específica de oleaje se define como la energía promedio en el tiempo en una columna del fluido que va desde el fondo a la superficie con una área horizontal unitaria. De acuerdo a las observaciones realizadas en la sección anterior, dicha energía específica se encuentra en parte como energía potencial y en parte como energía cinética. Examinemos cada una de estas partes por separado.

#### V.1.1 Energía potencial.

Considerando el fondo como el nivel de referencia (o de energía potencial cero) la energía potencial específica de oleaje se obtiene al sumar las energías potenciales correspondientes a *tabletas* de espesor infinitesimal en la columna de agua, como se esquematiza en la

fig.V.1. O sea, matematicamente se define por

$$E_{\text{pot}} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \int_{-h}^{\eta} \rho g(z+h) dz \right] dt}_{\text{promedio en el tiempo}} - \underbrace{\frac{1}{2} \rho g h^2}_{\text{energía potencial en reposo}} \quad (\text{V-1})$$

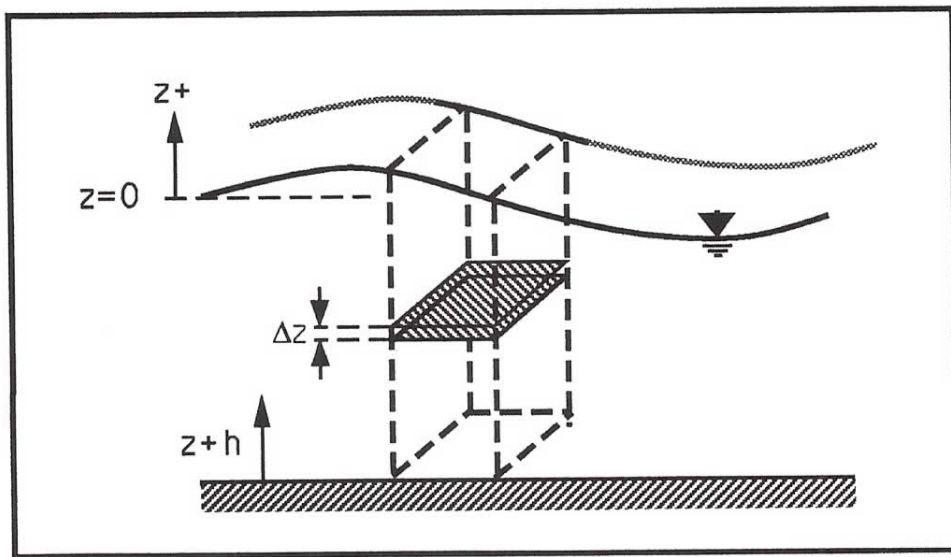


Fig.V. 1. Esquema de la columna de agua sobre la que se calcula la energía potencial de oleaje.

donde la energía potencial en reposo se resta puesto que solo estamos interesados en la energía inducida por el oleaje. Realizando la integral interna en la ec.V-1

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \rho g (\eta^2 + 2\eta h) \right] dt \quad (\text{V-2})$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \right] dt + \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \rho g \eta h \right] dt$$

y puesto que  $\eta = a \cos(kx - \omega t)$  es periódica en el tiempo (con periodo T)

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \right] dt + 0 \quad (\text{V-3})$$

e integrando en el tiempo

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{4} \rho g a^2 = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (\text{V-4})$$

### V.1.2 Energía cinética.

De la misma manera, la energía cinética específica en la columna se obtiene integrando aquella de las *tabletas* de espesor infinitesimal indicadas en la fig.V.1

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dz \right] dt \quad (\text{V-5})$$

donde  $(u^2 + w^2)$  es el cuadrado de la magnitud del vector velocidad del fluido.

La integral de  $z=-h$  a  $\eta$  se puede separar en dos partes, una de  $z=-h$  a 0 y la otra de  $z=0$  a  $\eta$ , o esquematicamente

$$\int_{-h}^{\eta} = \int_{-h}^0 + \int_0^{\eta} \quad (\text{V-6})$$

De un análisis de orden de magnitud similar a los hechos con anterioridad tenemos que

$$\mathcal{O} \left[ \int_0^\eta \right] = \frac{H}{h} \mathcal{O} \left[ \int_{-h}^0 \right] \quad (V-7)$$

por lo que a nuestro grado de aproximación (1<sup>er</sup> orden)

$$\int_{-h}^\eta = \int_{-h}^0 \quad (V-8)$$

Con las expresiones de teoría lineal de oleaje para  $v$  y  $w$  (ecs. III-43 y III-44) se tiene

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{4} \rho \left( \frac{a\omega}{\sinh kh} \right)^2 \int_{-h}^0 \left[ \cosh^2 k(z+h) + \sinh^2 k(z+h) \right] dz \quad (V-9)$$

y como

$$\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) \equiv \cosh(2\alpha) \quad (V-10)$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{4} \rho \left( \frac{a\omega}{\sinh kh} \right)^2 \frac{\sinh 2kh}{2k} \quad (V-11)$$

Ahora como

$$\sinh(2\alpha) \equiv 2 \sinh(\alpha) \cosh(\alpha) \quad (V-12)$$

y utilizando la relación de dispersión, ec.III-40,

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{4} \rho g a^2 = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (V-13)$$

que es igual a  $E_{\text{pot}}$ !

Hemos demostrado que la energía incluida en el oleaje se divide en

partes iguales en energía cinética y energía potencial. La energía específica total es

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \rho g a^2 = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (\text{V-14})$$

## V.2 PROPAGACION DE ENERGIA DE OLAJE (FLUJO DE ENERGIA).

Hemos visto que la energía de oleaje es proporcional a " $a^2$ ". Imaginemos por un momento oleaje propagándose sobre una zona previamente tranquila. Puesto que esta zona tranquila se caracteriza por una *amplitud de oleaje nula* (y por lo tanto de energía de oleaje nula), es obvio que la energía de oleaje se transmite en la misma dirección que éste. Aunque este hecho es intuitivo, como veremos más adelante, no todos los aspectos de esta transmisión son directamente intuitivos. Analizemos esta transmisión en una forma más estricta.

Visualizemos una línea que une todas las partículas de fluido originalmente sobre una línea vertical al moverse debido a oleaje que transita sobre la superficie libre, como lo indica la fig.III.2. Esta línea oscila alrededor de la vertical original siguiendo el movimiento natural de las partículas de fluido que la definen (ver secc.III.5.4). Considerando un ancho unitario, esta línea define una *superficie* o *membrana* a través de la cual no existe transferencia de masa. Por la equivalencia de *trabajo* y *energía* se puede considerar que el flujo de energía a través de esta membrana de ancho unitario normal a la dirección de propagación del oleaje es igual al trabajo por unidad de tiempo que el fluido del lado izquierdo realiza sobre el fluido del lado derecho.

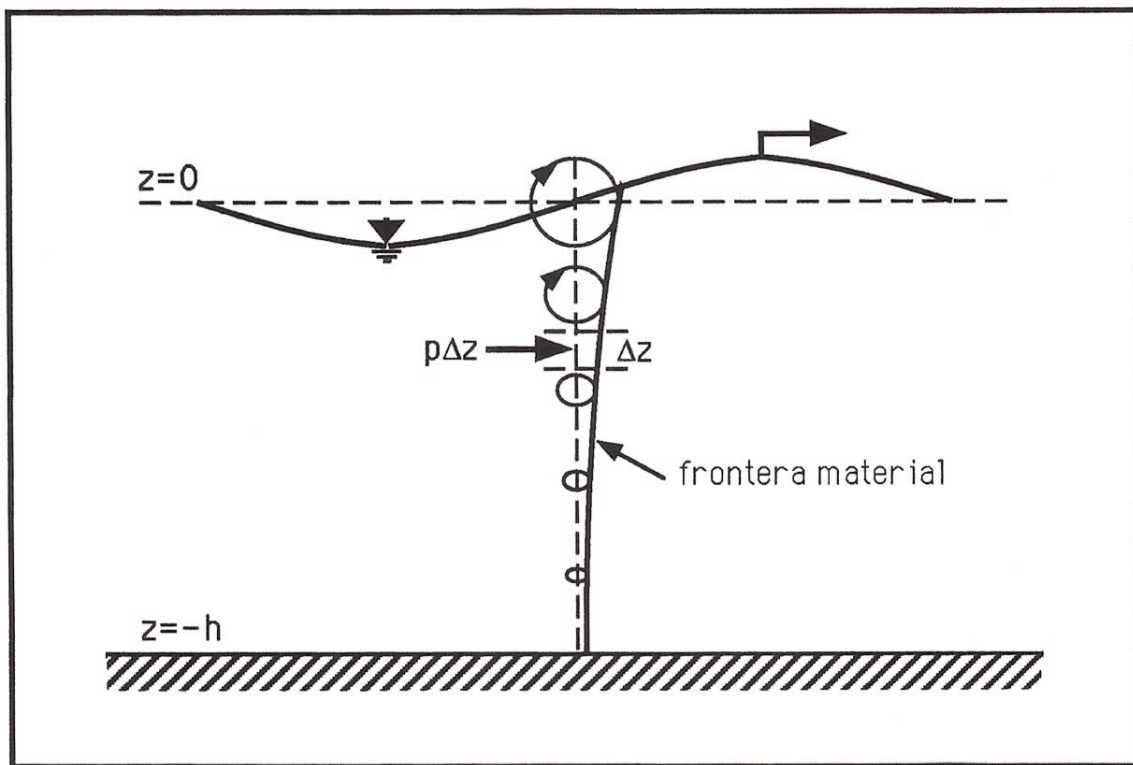


Fig.V.2. Esquema de cálculo de la energía cinética de oleaje.

Durante un período de oscilación dicho trabajo es:

$$W = \int_0^T \left[ \int_{-h}^{\eta} p u dz \right] dt \quad (V-15)$$

expresión que se clarifica al recordar que:

- la presión es una fuerza por unidad de área
- el ancho considerado (en dirección y) es unitario
- trabajo = (fuerza)(distancia)
- (trabajo/tiempo)=(fuerza)(distancia/tiempo)=(fuerza)(velocidad)
- que la energía solo se propaga en dirección x, por lo tanto solo se utiliza la componente u de la velocidad del fluido.

Recordando que (ver seccs. III.5.1 y II.2)

$$p = p_+ - \rho g z = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g z \quad (V-16)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (V-17)$$

se tiene que

$$W = \int_0^T \left[ \int_{-h}^{\eta} \left( -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g z \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \right] dt = \quad (V-18)$$

$$- \rho \int_0^T \left[ \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \right] dt - \rho g \int_0^T \left[ \int_{-h}^{\eta} z \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \right] dt$$

Nuevamente y en forma esquematica

$$\int_{-h}^{\eta} = \int_{-h}^0 + \int_0^{\eta}$$

y usando argumentos de ordenes de magnitud se muestra que a 1<sup>er</sup> orden de precisión.

$$W = -\rho \int_0^T \left[ \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \right] dt \quad (V-19)$$

y utilizando la expresión de  $\phi$  para teoría lineal de oleaje (ec.III.34) e integrando se obtiene

$$W = \left\{ \frac{1}{2} \rho g a^2 \right\} \left\{ \frac{\omega}{k} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right\} T \quad (V-20)$$

Esta *membrana* imaginaria regresa a su lugar orginal después de un período por lo que se puede interpretar que el flujo promedio de energía a través de ésta es:

$$E_F = \frac{W}{T} = \left\{ \frac{1}{2} \rho g a^2 \right\} \left\{ \frac{\omega}{k} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right\} \quad (V-21)$$

$$E_F = \quad E \quad C \quad n$$

donde la línea inferior es una interpretación directa considerando las ecs. V-14 y III-36; si además recordamos que (secc.III.7.3) la celeridad de un *grupo* de ondas es

$$C_g = \frac{C}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (V-22)$$

se llega a que la interpretación física de que  $n$  es la relación de *celeridad de grupo* a *celeridad de onda*

$$n = \frac{C_g}{C} \quad (V-23)$$

y por lo tanto

$$E_F = E C n = E C_g \quad (V-24)$$

o sea, puesto que el *flujo* de una cierta propiedad es el valor puntual de dicha propiedad multiplicada por su velocidad de avance, se concluye que la energía de oleaje se propaga en dirección del oleaje a la *velocidad de grupo*, o sea ¡a la misma celeridad que la envolvente de un grupo de olas y no a la celeridad de las olas en sí!

## V.2.1 Interpretación física.

Hay dos formas simples (pero no estrictamente correctas) de interpretar la expresión para  $E_F$  (ec.V-24). Para ello imaginemos un generador de olas que comienza su movimiento en forma abrupta proporcionando una energía promedio  $= (E C n)T$  por unidad de ancho del canal cada periodo de oscilación ( $T$ ) del mismo.



La primera interpretación es asociando

$$E_F = E (Cn) = E C_g \quad (V-25)$$

o sea el flujo de energía específica de oleaje alejándose del generador es tal que la totalidad de la energía *inyectada* por el generador avanza a una celeridad igual a la celeridad de grupo; esto es, existe un frente abrupto adelante del cual no hay oleaje y tras el cual el oleaje ya es uniforme con

$$H = \sqrt{8E/\rho g} \quad (V-26)$$

Este frente avanza a la velocidad  $C_g$  y en el instante  $t = iT$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  se encuentra a

$$x = C_g t = (nC)(iT) = n i L \quad (V-27)$$

del generador de olas (puesto que  $C=L/T$ ). Esta interpretación se esquematiza en la fig.V.3.

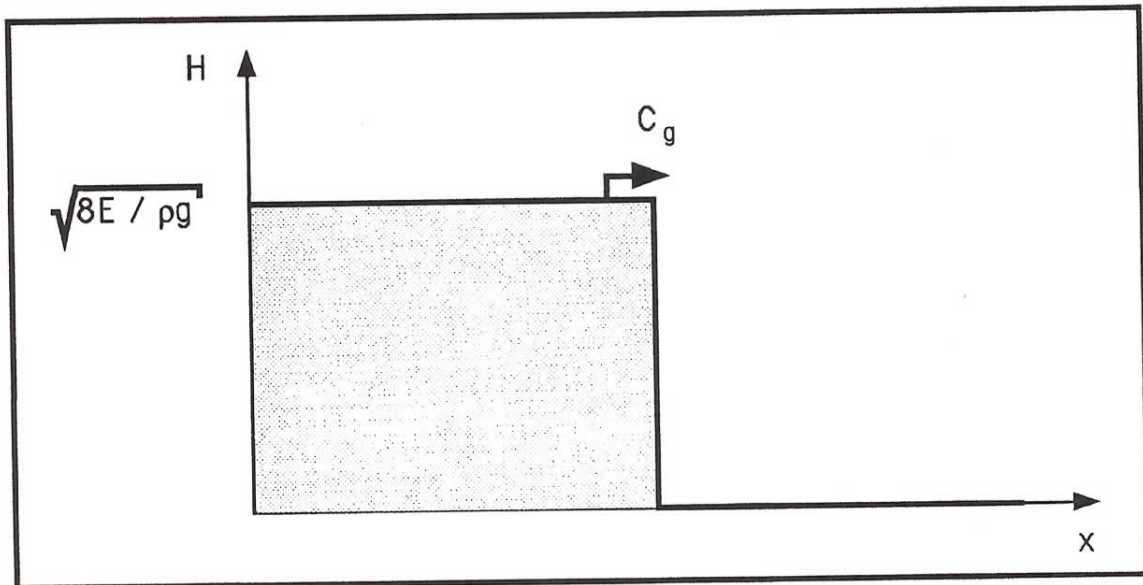


Fig.V.3. Primera interpretación (aproximada) del flujo de energía.

La segunda interpretación es asociando

$$E_F = (En) C \quad (V-28)$$

o sea, el flujo de energía es tal que solo parte de la energía (la fracción  $n$ ) se mueve a la celeridad de la onda. Como ejemplo tomemos olas en aguas profundas donde  $n = C_g / C = 1/2$ , o sea solo  $1/2$  de la energía específica se transmite en dirección del oleaje a velocidad  $C$ . Durante el primer periodo existirá una energía  $En = E/2$  uniformemente distribuida en el intervalo de longitud  $0 \leq x \leq L$ . Para el 2º periodo existirá otro tanto de energía  $En = E/2$  adicional en  $0 \leq x \leq L$ , pero la mitad de la energía disponible en el intervalo  $0 \leq x \leq L$  en el intervalo anterior se transmitirá al intervalo  $L \leq x \leq 2L$ , resultando en una energía total en  $0 \leq x \leq L$  de  $En + n(En) = E/2 + (E/2)/2 = 3E/4$ , en  $L \leq x \leq 2L$  de  $En = E/2$ , y nula en  $x \geq 2L$ . Este proceso de transmisión de una fracción  $n$  ( $=1/2$  en el ejemplo de aguas profundas) de la energía disponible en la sección en el intervalo de tiempo anterior hacia  $+x$  a una celeridad  $C$ , tiende, al avanzar el tiempo, a producir una acumulación de energía  $E$  (o sea oleaje de altura  $H = (8E/\rho g)^{1/2}$ ) tras el frente de propagación paulatino

de energía. Esto se esquematiza en la fig.V.4.

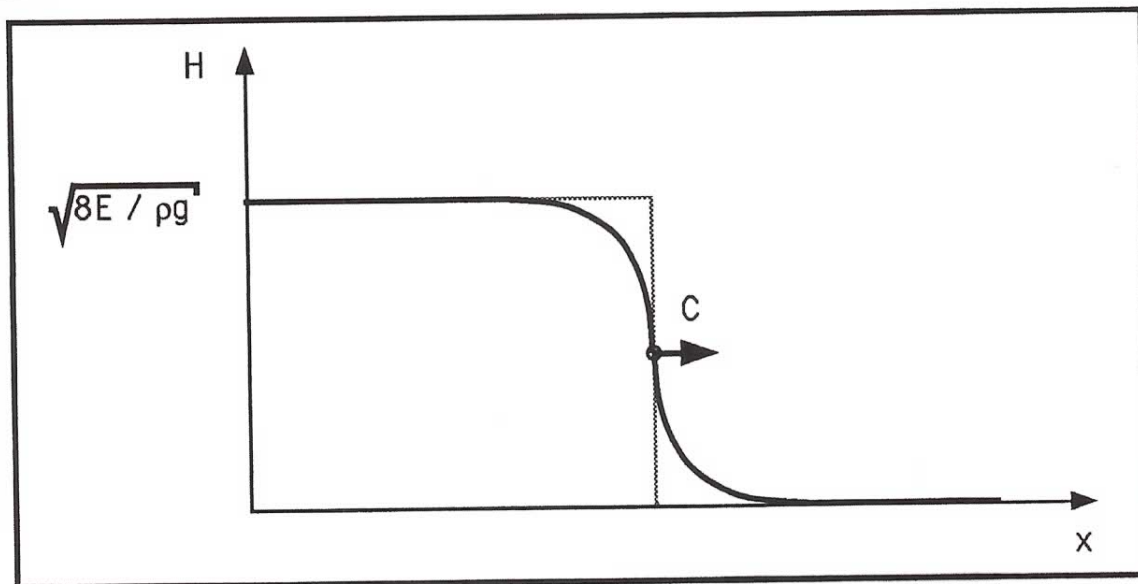


Fig.V.4. Segunda interpretación (aproximada) del flujo de energía.

En la tabla siguiente se indica la evolución en el tiempo y en el espacio de la energía de oleaje (normalizada con respecto a la energía aportada por el generador) para el caso de aguas profundas  $n=1/2$ .

x/L	1	2	3	4	5	6
t/T =0	0	0	0	0	0	0 . . . .
=1	1/2	0	0	0	0	0 . . . .
=2	3/4	1/4	0	0	0	0 . . . .
=3	7/8	4/8	1/8	0	0	0 . . . .
=4	15/16	11/16	5/16	1/16	0	0 . . . .
=5	31/32	26/32	16/32	6/32	1/32	0 . . . .
	↓	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	1					

por ejemplo, el 5/16 (en el recuadro punteado) proviene de la suma de la mitad de la energía disponible en el intervalo de tiempo anterior (o sea  $(1/2)(1/8)=1/16$  ) más la mitad de la energía en el intervalo de x anterior en el intervalo de tiempo anterior (o sea  $(1/2)(4/8)=4/16$  )

Un análisis más estricto del problema no permanente de generación de oleaje empezando del reposo basado en las ecuaciones linealizadas, presentando en Madsen (1970), muestra que la realidad (con verificación experimental) es más complicada y que corresponde a la situación mostrada en la fig.V.5.

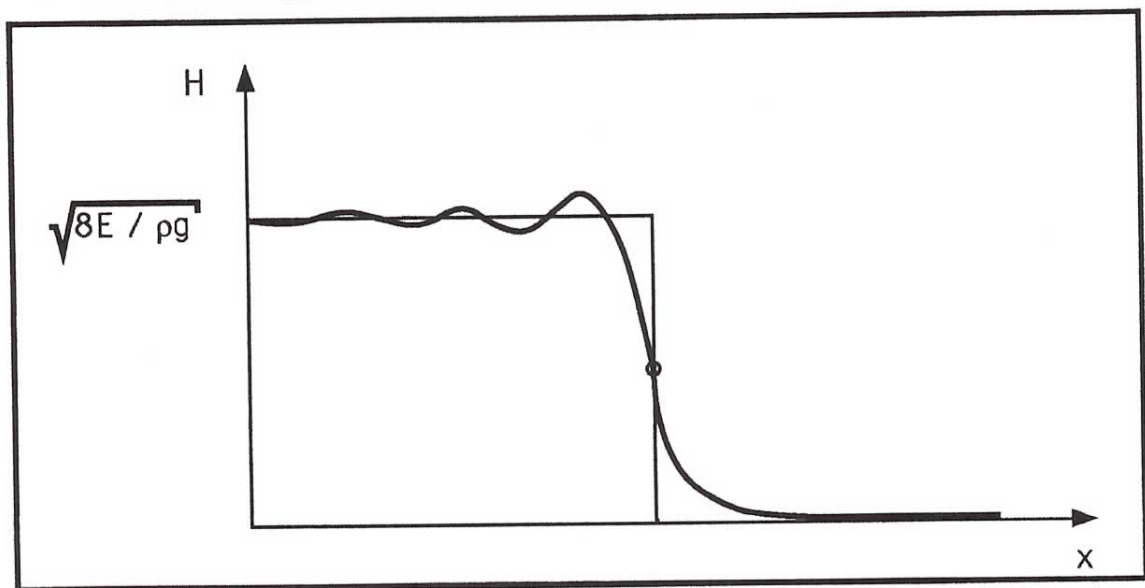


Fig.V.5. Interpretación más estricta del flujo de energía (Madsen, 1970).

Nótese que el nivel final de altura de oleaje es sobrepasado en las primeras olas tendiendo oscilatoriamente al nivel correspondiente a la energía  $E$ .

Este es uno de los problemas del método de generar solamente durante tiempos cortos para evitar la re-reflexión (ver secc.IV.7), pues las primeras olas son menores que las que se desean generar pero después hay inclusive mayores y toma algún tiempo el acercarse a la condición final; o sea nuevamente ¡las olas incidentes no son exactamente las que se desean generar!

### V.3 PRINCIPIO DE CONSERVACION DE ENERGIA.

En forma completamente análoga al campo general de la mecánica de flúidos o la hidráulica (ver textos básicos en estas disciplinas), el principio de conservación de energía específica de oleaje (basado en que la energía que ingresa menos la que egresa de un cierto volúmen de control, menos la que se disipa es igual a la energía que se almacena dentro del mismo, todo esto por unidad de tiempo) se expresa como:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E_F}{\partial x} = -D \quad (V-29)$$

Una D negativa indica una ganancia de energía.

Como  $E_F = EC_g$ , para una cierta frecuencia dada sobre un fondo horizontal se tiene  $C_g = \text{cte}$  y suponiendo nula disipación de energía,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + C_g \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (V-30)$$

Estas dos expresiones del principio de conservación de energía específica de oleaje, cada una en el caso correspondiente, son sumamente útiles para calcular la evolución o transformación del oleaje cuando se conoce o se pueden evaluar las condiciones en un punto y la disipación de energía. La ec.V-29 es relativamente general cuando x es la dirección *local* en la que avanza el oleaje, mientras que la ec.V-30 es adecuada solo en los casos en que  $C_g$  es constante en dirección x.

#### V.3.1 Ejemplo de aplicación.

Considere el caso esquematizado en la fig.V.6, donde oleaje

monocromático permanente avanza a lo largo de un canal unidimensional, encontrándose con un cambio abrupto de la sección rectangular del mismo, en cuanto a profundidad ( $h$ ) y/o ancho ( $b$ ).

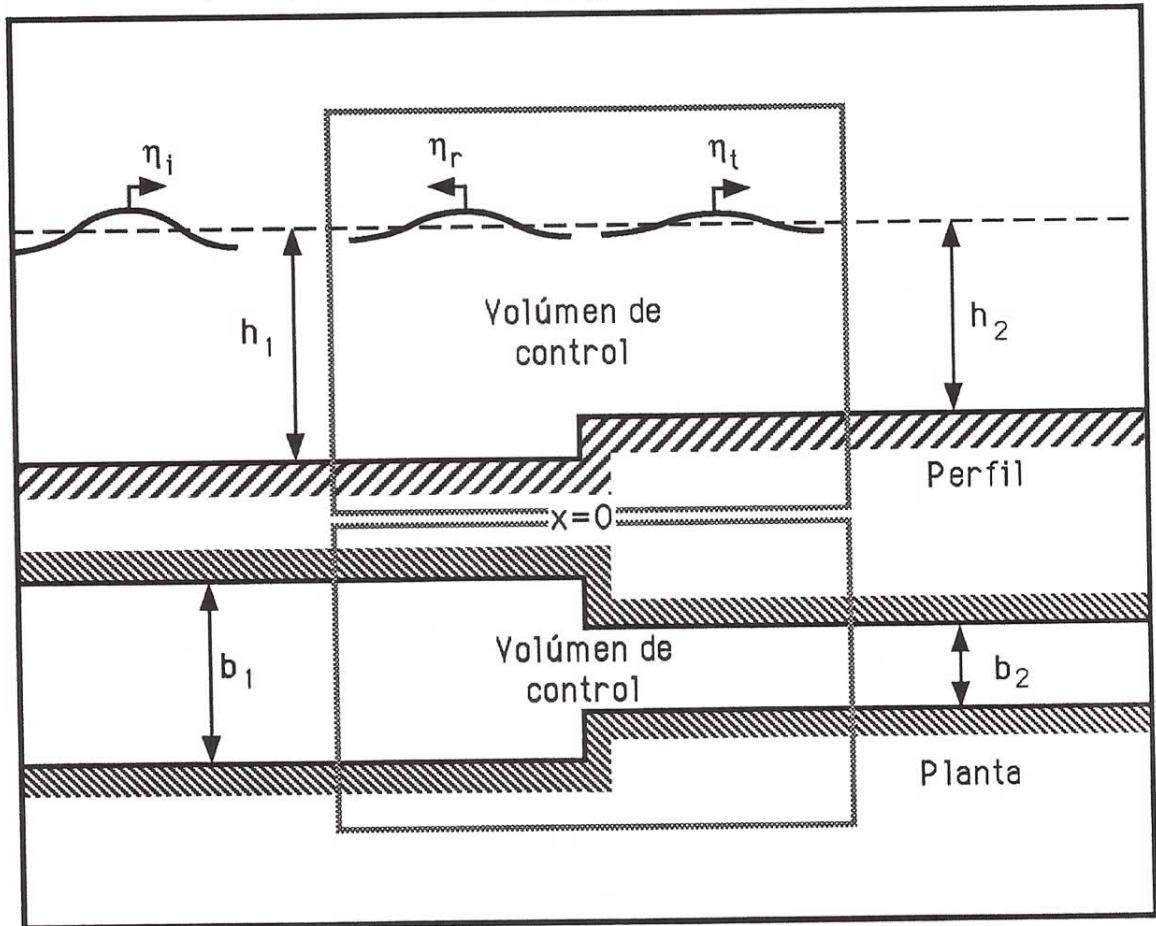


Fig.V.6. Esquema de una onda incidiendo sobre un cambio abrupto de geometría en un canal.

Conociendo la onda incidente,  $\eta_i = a_i \cos(k_1 x - \omega t)$ , ¿cuales son las amplitudes reflejada ( $a_r$ ) y transmitida ( $a_t$ )?

Con una onda incidente

$$\eta_i = a_i \cos(k_1 x - \omega t) \quad (V-31)$$

se espera que al incidir sobre el cambio abrupto de geometría, se presente una cierta reflexión (en dirección  $-x$ ) y una cierta transmisión (en dirección  $+x$ ). El periodo o frecuencia del oleaje no sufre cambio alguno en la transición. Esto se puede comprobar eurísticamente considerando que el sistema es exitado (o *forzado*) por el oleaje incidente de frecuencia  $\omega$  y por ende puede responder (mientras siga siendo forzado) sólo a esta misma frecuencia (ver por ejemplo textos básicos sobre mecánica de cuerpos rígidos o vibraciones). En el capítulo VII se comentará sobre un *principio de conservación de crestas*, mismo que aplicado a este caso, también comprueba eurísticamente la invariancia del periodo o frecuencia del oleaje. Sin embargo la *longitud de onda* o el *número de onda* sí dependen de la profundidad local y por lo tanto presentan un cambio a través del escalón en el fondo. Considerando que no existe defasamiento alguno en el proceso de reflexión-transmisión, la onda reflejada tendrá la forma

$$\eta_r = a_r \cos(k_1 x + \omega t) \quad (V-32)$$

mientras que la transmitida será descrita por

$$\eta_t = a_t \cos(k_2 x - \omega t) \quad (V-33)$$

Observe que el sentido de avance de cada onda esta definido por el signo del término  $k_j x$  (ver secc.III.7.4). Es importante remarcar que las suposiciones anteriores son estrictamente válidas solo para ondas largas (aguas someras).

En el cambio abrupto de geometría la superficie libre tiene que ser continua, o sea no puede existir un cambio abrupto en la superficie libre, por lo que en  $x=0$  se cumple

$$\eta_i + \eta_r = \eta_t \quad (V-34)$$

o

$$a_i \cos(-\omega t) + a_r \cos(\omega t) = a_t \cos(-\omega t) \quad (V-35)$$

y puesto que  $\cos(-\alpha) \equiv \cos(\alpha)$  esto implica que

$$a_i + a_r = a_t \quad (V-36)$$

Puesto que en este caso, el ancho del canal no es constante (ni se puede considerar necesariamente unitario) y la ecuación de conservación de energía expresa el balance *por unidad de ancho*, la aplicación de esta requiere el multiplicar los flujos de energía de oleaje por el respectivo ancho. Esto es, para un volumen de control que incluye el cambio de geometría (indicado con línea punteada en la fig.V.6) y para condiciones de oleaje permanente

$$E_{F,i} b_1 - E_{F,r} b_1 = E_{F,t} b_2 \quad (V-37)$$

Substituyendo

$$E_F = E C_g = \frac{1}{2} \rho g a^2 C_g \quad (V-38)$$

respectivamente para la onda incidente (sección 1), onda reflejada (sección 1) y onda transmitida (sección 2) se obtiene

$$a_i^2 - a_r^2 = \frac{C_{g,2} b_2}{C_{g,1} b_1} a_t^2 \quad (V-39)$$

Resolviendo las ecs.V-36 y V-39 en forma simultánea se obtiene

$$a_r = \frac{C_{g,1} b_1 - C_{g,2} b_2}{C_{g,1} b_1 + C_{g,2} b_2} a_i \quad (V-40)$$

$$a_t = \frac{2 C_{g,1} b_1}{C_{g,1} b_1 + C_{g,2} b_2} a_i \quad (V-41)$$

expresiones que definen las incógnitas en términos de parámetros conocidos.



## V.4 CONSIDERACIONES VARIAS

### V.4.1 Translación de grupos finitos de olas.

Cualquier grupo finito de olas se translada, como grupo, a la velocidad  $C_g$ . Esto se demuestra a partir del principio de conservación de energía; en este contexto, un grupo finito de olas sobre un fondo horizontal se describe por

$$\frac{\partial E}{\partial t} + C_g \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (V-42)$$

con condiciones iniciales

$$E = \begin{cases} E_0 & -l \leq x \leq l \\ 0 & \text{en el resto del dominio} \end{cases} \quad (V-43)$$

donde  $l$  es la mitad de la longitud total de este grupo finito de olas (idealmente considerado de amplitud uniforme) y  $E_0$  es la energía de oleaje inicial, situación que se esquematiza en la fig.V.7 en la traza con línea punteada.

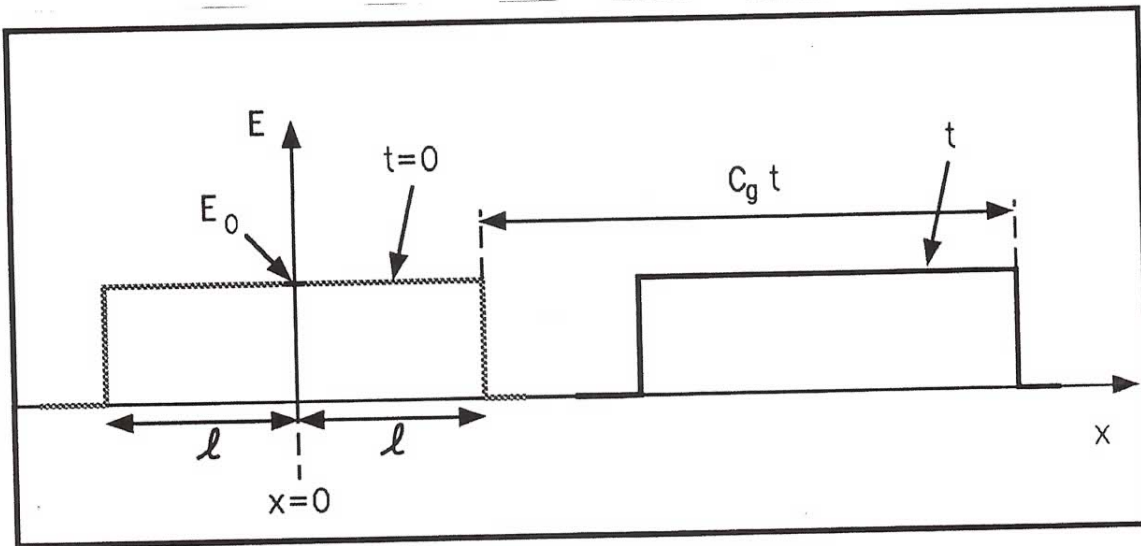


Fig.V.7. Translación de un grupo finito de olas.

La solución de las ec.V-42 bajo las condiciones iniciales en la ec.V-43 es, para un tiempo cualquiera  $t$

$$E = \begin{cases} E_0 & -l \leq x - C_g t \leq l \\ 0 & \text{en el resto del dominio} \end{cases} \quad (\text{V-44})$$

situación esquematizada en la misma fig.V.7 con línea continua. El hecho de no existir energía fuera del intervalo

$$C_g t - l \leq x \leq C_g t + l \quad (\text{V-45})$$

implica que el grupo se mueve a velocidad  $C_g$  y que adelante de su frente o atrás de su cola no existe oleaje alguno.

Esto tiene implicaciones importantes en la distribución de oleaje generado por una tormenta. Si la tormenta es finita en duración (como todas lo son) cada componente frecuencial del espectro de olas generado se traslada a la velocidad  $C_g(\omega)$ , aún cuando las olas individuales avancen más rápido, a velocidad  $C(\omega)$ . Las olas individuales que alcanzan al frente del grupo simplemente desaparecen.

#### V.4.2 Aparente discrepancia de superponer dos trenes de olas de igual frecuencia.

Aplicando directamente los conceptos vistos en la secc. III.7.3, al superponer 2 olas de igual amplitud  $a_0$  (con energía  $E_0$ ) cada una y ambas con frecuencia  $\omega$  ( $\Delta\omega = 0$  en la secc. III.7.3) avanzando en la misma dirección y en fase (o sea con sus crestas coincidiendo) se obtiene una onda monocromática de amplitud  $a = 2a_0$ , o sea, se obtiene un tren de olas con energía específica

$$E = \frac{1}{2} \rho g (2a_0)^2 = 2\rho g a_0^2 = 4 E_0 \quad (V-46)$$

pero esto implica que al superponer 2 trenes de energía  $E_0$ , en lugar de obtener un tren de energía  $2E_0 = E_0 + E_0$  ¡se duplica la energía disponible a  $4E_0$ !

Intuitivamente sabemos que esto es imposible<sup>1</sup>. ¿Porqué esta discrepancia entre la superposición de amplitudes y de energía?

La respuesta se encuentra en el hecho de que no existe ningún mecanismo natural por el que dos trenes de olas de igual frecuencia (que por lo tanto avanzan a igual velocidad) se superimpongan naturalmente pues uno nunca alcanza al otro.

Si insistimos en superponerlos artificialmente (en nuestra mente) y no proporcionamos energía al hacerlo obtendremos un tren de olas con

$$E = 2E_0 \Rightarrow a = \sqrt{2} a_0 \quad (V-47)$$

1

-----  
De ser posible podríamos proporcionar una cantidad ilimitada de energía a la humanidad con solo generar olas y superponerlas puesto que aparentemente esto duplicaría la cantidad de energía invertida en generarlas.

o si proporcionamos la energía  $2E_0$  obtendremos un tren de olas con

$$E = 4E_0 \Rightarrow a = 2a_0 \quad (V-48)$$

#### V.4.3 Orden de aproximación de las expresiones de energía.

Las expresiones de energía, en términos de la altura de ola  $H$  (no de la amplitud  $a$ ), son válidas inclusive a 2° orden de aproximación como se podría comprobar con las expresiones de la teoría de Stokes de 2° orden o sea la energía predicha por la teoría lineal y la de Stokes de 2° orden son iguales.