

VI. INTERACCION OLEAJE - FONDO.

La única forma como se ha considerado la presencia del fondo hasta este momento es a través de la variable h que representa la profundidad local. En este capítulo trataremos diversos efectos que el fondo tiene sobre el oleaje y viceversa, efectos que el oleaje tiene sobre el fondo. Estos efectos comienzan a ser importantes para *oleaje de aguas intermedias* y se convierten en esenciales para *oleaje de aguas poco profundas*.

VI.1 LA CAPA LIMITE DE FONDO (OSCILATORIA).

Hasta este momento se había aceptado el flujo potencial en todo el dominio aceptando deslizamiento de las partículas fluídas en el fondo. Los fundamentos de la mecánica de fluidos viscosos hace este deslizamiento imposible, pues las partículas de fluido inmediatamente en contacto con la frontera, necesariamente deben tener la misma velocidad que esta, en el caso de un fondo inmóvil, una velocidad nula. En flujo unidireccional, esta característica fundamental de los fluidos reales produce una (usualmente) delgada zona en la vecindad de la frontera inmóvil donde la velocidad paralela a ella cambia rápidamente de un valor cero inmediatamente sobre ella, al valor correspondiente al flujo no viscoso (o calculado con teoría potencial) a una cierta distancia de la misma, fig. VI.1. A esta zona de transición en la velocidad paralela a la frontera se le denomina *capa límite*, y a su espesor aproximado se le denomina δ . El estudio detallado de el flujo en la capa límite unidireccional se encuentra fuera de los alcances de este trabajo, por lo que se refiere al lector a textos de mecánica de fluidos en general. En la presente discusión, se hará énfasis en las características especiales de una capa límite oscilatoria, dándose por conocidas aquellas de una capa límite unidireccional.

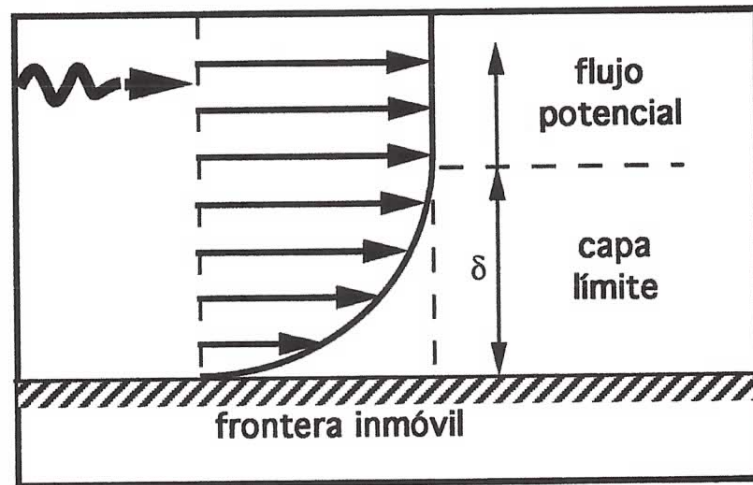


Fig. VI.1. Distribución de velocidades en un flujo unidireccional en la zona cercana a una frontera inmóvil.

Ahora estudiaremos las características de flujo inmediatamente junto al fondo. Para ello consideraremos el origen de la coordenda vertical en el fondo, con una nueva variable ζ , como se esquematiza en la fig. VI.2.

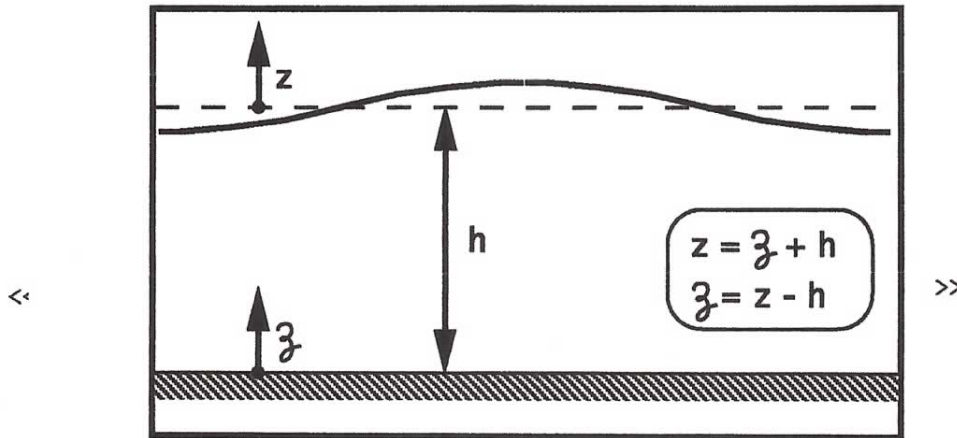


Fig. VI.2. Orígenes de las coordenadas verticales z y ζ .

De la ecuación de momentum horizontal (ver las ecs.II-9, II-10 y II-12, para la dirección x , con uniformidad en dirección y), cerca del fondo se tiene

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{x\zeta}}{\partial \zeta} \quad (\text{VI-1})$$

donde p_{∞} indica la presión fuera de la capa límite o presión indicada por la teoría potencial. El subíndice ∞ pretende señalar que esta presión es aquella para una ζ muy grande.

Usando los mismos argumentos que para una capa límite unidireccional, o sea aquella generada por un flujo unidireccional sobre una frontera inmóvil (ver por ejemplo Schlichting 1960, Daily y Harleman 1966 o innumerables otros textos de mecánica de flúidos) nosotros anticipamos que la dimensión vertical de la capa límite, δ , será mucho menor que la horizontal. Esto es aún mas claro que en el caso unidimensional pues al depender δ de x (o distancia recorrida desde el borde de la frontera inmóvil), en el caso de flujo oscilatorio x nunca pasa de

2A_b. Las fig. VI.3 esquematiza el desarrollo de una capa límite tanto en flujo unidireccional como en flujo oscilatorio.

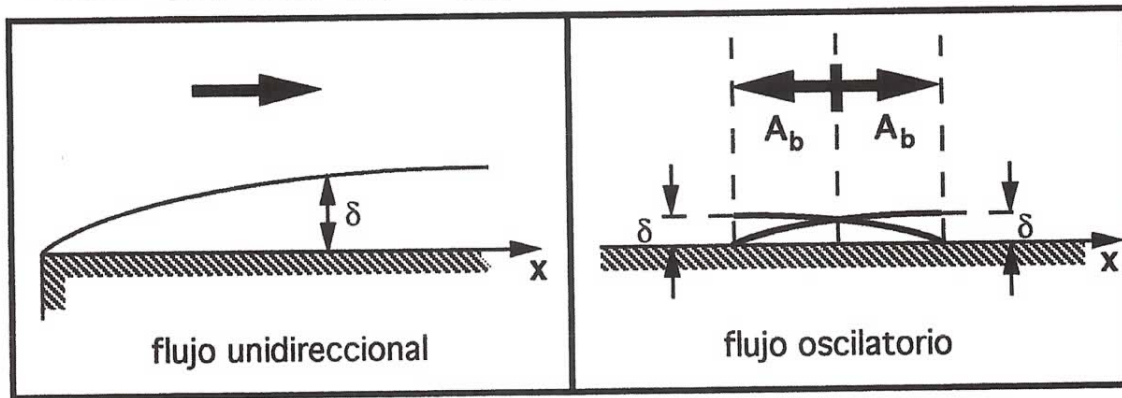


Fig. VI.3. Desarrollo de la capa límite en flujo unidireccional y en flujo oscilatorio.

Por esta razón, el término $\partial \tau_{xz} / \partial z$ domina al $\partial \tau_{xz} / \partial x$ ¹ y con la muy común relación de la mecánica de fluidos que relaciona el esfuerzo cortante con el gradiente de velocidad (ver ecs.II.13 y II.21)

$$\tau_{xz} = \rho \varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{VI.2})$$

donde $\varepsilon_z = \nu = \text{constante}$ para flujo laminar en la capa límite, $\varepsilon_z = \varepsilon_z(z) = \text{función de } z$ para flujo turbulento en la capa límite, ν es la viscosidad cinemática del fluido y ε_z es la viscosidad vorticosa en dirección vertical (estrictamente hablando ε_{xz}), tenemos

$$\frac{Du}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{VI-3})$$

Vale la pena remarcar que p_∞ es la presión fuera de la capa límite o

¹ Al ocurrir un cambio del mismo orden en una distancia mucho menor, el gradiente es mucho mayor.

aproximadamente aquella provista por la teoría de flujo potencial en el fondo, $p(z = -h)^2$.

Por la presencia del fondo las velocidades y aceleraciones verticales son muy pequeñas en esta zona siendo estrictamente nulas en el fondo. Así la ecuación de cantidad de movimiento en dirección ζ (considerando las ecs. II.9, II-10 y II-12 en dirección z , con uniformidad en dirección y , además de las ecs. II.13 y II.21) se convierte en

$$-\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \rho g = 0 \quad (\text{VI.4})$$

que integrada con $p(\zeta=\delta) = p_\infty$ produce una expresión de presión hidrostática dentro de la capa límite

$$p(\zeta) = p_\infty + \rho g (\delta - \zeta) \quad 0 \leq \zeta \leq \delta \quad (\text{VI.5})$$

En forma consistente con la linealización ya realizada fuera de la capa límite (ver capítulo III) se puede obtener la ecuación de cantidad de movimiento en dirección x (ec.VI.3) como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\epsilon_\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{VI.6})$$

donde los términos de aceleración convectivas resultan despreciables en comparación al de la aceleración local para las condiciones de la linealización ya utilizada en el capítulo III.

Puesto que fuera de la capa límite, la teoría potencial rige, el efecto del esfuerzo cortante debe ser despreciable fuera de ella, por lo que la ec.VI.6 aplicada al límite superior de la misma establece

² Puesto que el espesor de la capa límite es muy pequeño y el valor de la presión para $z=-h$ o para $z=-h+\delta$ es prácticamente el mismo.

$$\frac{\partial u_{\infty}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x} \quad (\text{VI.7})$$

donde u_{∞} es la velocidad horizontal fuera de la capa límite, aproximadamente igual a $u(z = -h)$ ³. Así pues (de las ecs. III.45 y III.46)

$$u_{\infty} = U_b \cos(kx - \omega t) \quad (\text{VI.8})$$

$$U_b = \frac{a\omega}{\sinh kh} \quad (\text{VI.9})$$

Combinando las ecs. VI.6 y VI.7 se puede expresar la distribución de velocidades en su forma de déficit de velocidad

$$\frac{\partial(u-u_{\infty})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial(u-u_{\infty})}{\partial z} \right) \quad (\text{VI.10})$$

que debe satisfacer

$$u = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (\text{VI.11})$$

$$u = u_{\infty} \quad \text{en} \quad z = \delta \quad (\text{VI.12})$$

Las tres expresiones anteriores son la *ecuación de la capa límite*.

Ya obtenida $u(z)$ se puede obtener el esfuerzo al cortante horizontal en el fondo de la ec.VI.2 evaluada en $z=0$

$$\tau_b = \tau_{xz}(z=0) = \rho \varepsilon_z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (\text{VI.13})$$

que es importante para estudiar la interacción con el sedimento y la disipación de energía en la capa límite de fondo.

V.1.1 Solución analítica para el caso laminar

³ Estrictamente $u(z=-h+\delta)$ pero aceptable porque $\delta \ll h$.

Debido a la variación periódica de u_{∞} , que fuerza al movimiento dentro de la capa límite, suponemos que la variación temporal y en dirección x del déficit de velocidad dentro de la capa límite, es también periódica y de la misma forma que la velocidad externa que la genera, quedando tan solo la variación en dirección vertical z como incógnita, o sea

$$u - u_{\infty} = \mathcal{U}(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{VI.14})$$

donde, como ya es costumbre, nos referimos a la parte real aún sin expresarlo explícitamente. Esta suposición convierte a la ecuación de capa límite, ec. VI-10, en

$$\frac{d}{dz} \left(\epsilon_z \frac{d\mathcal{U}(z)}{dz} \right) + i\omega \mathcal{U}(z) = 0 \quad (\text{VI.15})$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= -U_b && \text{en } z = 0 \\ \mathcal{U} &= 0 && \text{en } z = \delta \end{aligned} \quad (\text{VI.16})$$

donde debe considerarse que $\mathcal{U}(z)$ es la magnitud de la variación periódica del déficit de velocidad con respecto a la velocidad fuera de la capa límite, y no de la velocidad en sí.

Para flujo laminar en la capa límite $\epsilon_z = \nu = \text{constante}$, con lo que

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{dz^2} + i \frac{\omega}{\nu} \mathcal{U} = 0 \quad (\text{VI.17})$$

que tiene la solución

$$\mathcal{U}(z) = -U_b e^{-(1-i) \sqrt{\omega/2\nu} z} \quad (\text{VI.18})$$

donde la otra parte de la solución general (creciente exponencialmente) se eliminó por las condiciones de frontera.

Finalmente $u(x, z, t)$ se expresa, ya considerando solo la parte real, como

$$u(x, z, t) = U_b \left[\cos(kx - \omega t) - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} z} \cos\left(kx - \omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} z\right) \right] \quad (\text{VI.19})$$

donde, como era de esperarse, el primer término representa la velocidad fuera de la capa límite, misma que es afectada por el segundo término que representa la desviación de la teoría potencial debido a la viscosidad del fluido.

La fig.VI-4 muestra esquemáticamente esta variación, donde las dos trazas mostradas indican los extremos del movimiento, que se dan con una diferencia de tiempo de medio periodo de oscilación.

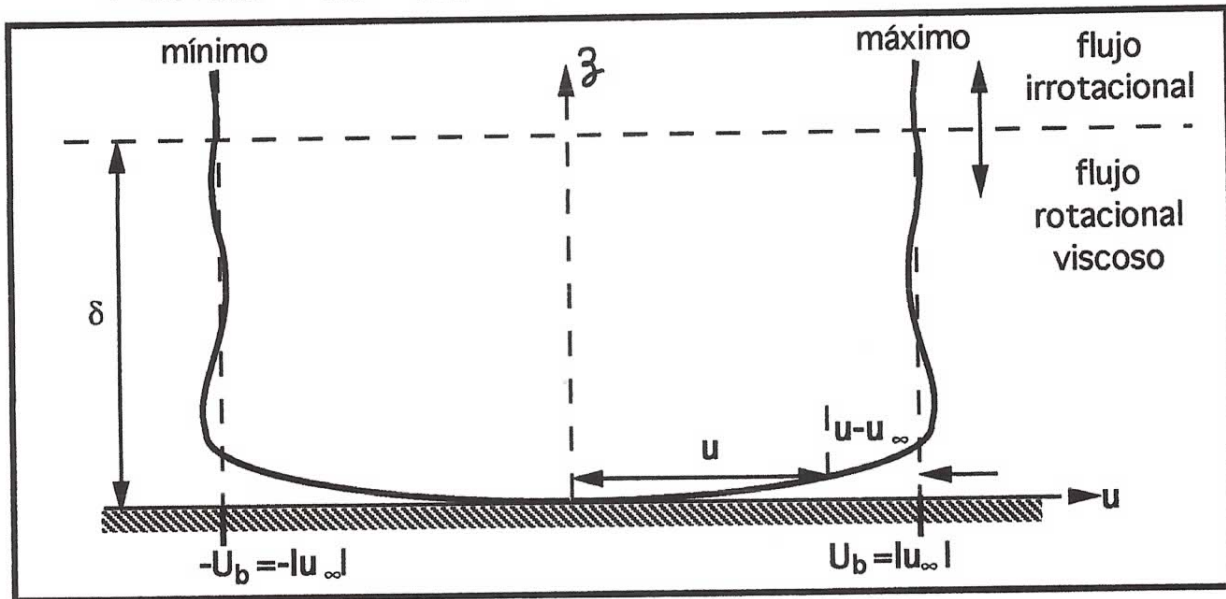


Fig. VI.4. Variación vertical de la velocidad u dentro de la capa límite oscilatoria. Solo se presentan las trazas extremas.

El lector interesado puede comprobar por sustitución directa en la ec.VI.10 que la ec.VI.19 representa una solución efectivamente, lo que justifica la suposición realizada anteriormente sobre la variación en el tiempo y en la dirección x .

Nótese que δ aún no está definida exactamente y como u tiende a u_∞ oscilatoriamente con atenuación exponencial podemos hacer esto de una forma arbitraria especificando que en $z = \delta_L$ el déficit de velocidad es tan solo del 1%

$$u = 99\% u_\infty \quad \text{o} \quad u - u_\infty < 0.01 u_\infty$$

lo que sucede para

$$z = \delta_L = 5 \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad \text{(VI.20)}$$

Esta es la solución clásica de Stokes para capa límite oscilatoria

(Schlichting, 1960).

VI.1.2 Solución analítica para el caso turbulento

Para capa límite turbulento seguiremos la solución por Kajiura en 1964 y 1968. En este caso

$$\varepsilon_{\zeta} = \varepsilon = K \bar{u}_* \zeta \quad (\text{VI.21})$$

la viscosidad varía linealmente con la distancia a la frontera sólida, donde K es la constante de VonKarman (aproximadamente igual a 0.4), y \bar{u}_* es el valor promedio en un ciclo de la velocidad al cortante, cuyo valor instantáneo (función del tiempo) está dado por

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} \quad (\text{VI.22})$$

Con la variación

$$u - u_{\infty} = \mathcal{U}(\zeta) e^{-i(\omega t - kx)} \quad (\text{VI.23})$$

donde el cambio de signo en el exponente con respecto al de la ec.VI.14 es solo por conveniencia y puesto que nos referimos implícitamente a la parte real no tiene consecuencia⁴, en la ecuación de la capa límite, ec.VI.10

$$\frac{d}{d\zeta} \left[K \bar{u}_* \zeta \frac{d\mathcal{U}}{d\zeta} \right] + i^3 \omega \mathcal{U} = 0 \quad (\text{VI.24})$$

con condiciones de frontera

⁴ puesto que $\cos(x) = \cos(-x)$

$$u = -U_b \quad \text{en} \quad z = z_0 \quad (\text{VI.25})$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad z = \delta$$

donde ahora la velocidad nula (o alternativamente el déficit de velocidad total U_b) no se da precisamente sobre la posición nominal de la frontera, $z=0$, sino a una cierta distancia z_0 de la misma, donde z_0 es una longitud característica de la rugosidad del fondo.

Introduciendo la variable $\xi = \frac{z}{\ell}$, donde ℓ es una longitud característica llamada *longitud de mezclado* en mecánica de fluidos

$$\ell = \frac{K \bar{u}_*}{\omega} \quad (\text{VI.26})$$

la ec.VI.24 se puede expresar como

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{du}{d\xi} \right) + i^3 u = 0 \quad (\text{VI.27})$$

con condiciones de frontera

$$u = -U_b \quad \text{en} \quad \xi = \xi_0 = \frac{z_0}{\ell} \quad (\text{VI.28})$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \xi = \frac{\delta}{\ell}$$

cuya (no obvia ni simple) solución de acuerdo a Kajiwara es

$$u = -U_b \left[\frac{\text{Ker} \left(2\sqrt{\xi'} \right) + i \text{Kei} \left(2\sqrt{\xi'} \right)}{\text{Ker} \left(2\sqrt{\xi_0'} \right) + i \text{Kei} \left(2\sqrt{\xi_0'} \right)} \right] \quad (\text{VI.29})$$

donde Ker y Kei son las funciones de Kelvin de orden cero (de la familia de funciones de Bessel), ver Abramowitz y Stegun (1965). En flujo turbulento totalmente rugoso se utiliza como longitud

característica de la rugosidad de la pared, λ_0 , 1/30 de la rugosidad equivalente de Nikuradse, ver Daily y Harleman (1975), o sea

$$\lambda_0 = \xi_0 \ell = k_s / 30 \quad (\text{VI.30})$$

Del comportamiento de las funciones "Ker" y "Kei" para $\xi \ll 1$ (o sea muy cerca de la pared) se puede deducir que la distribución de velocidades cerca del fondo obedece la ley logarítmica como en flujo unidireccional, Daily y Harleman (1975). Además para ξ grandes se puede deducir que $U \rightarrow 0$ y que es aproximadamente cero para una distancia de la pared

$$\lambda = \delta_t = 2\ell = 2 \frac{K \bar{u}_*}{\omega} \quad (\text{VI.31})$$

que se puede definir como el espesor de la capa límite turbulenta, δ_t .

La arbitrariedad de la definición exacta de δ_t nos permite usar $u_{* \max}$ (que también podemos llamar U_* siguiendo la costumbre de usar las letras mayúsculas correspondientes para denominar a la amplitud de un variación armónica o sinusoidal) en lugar de \bar{u}_* , donde

$$U_* = u_{* \max} = \sqrt{\frac{\tau_{b \max}}{\rho}} \quad (\text{VI.32})$$

El desarrollo de Kajiura contiene varias suposiciones de difícil comprobación, tal como el uso de una u_* constante en el tiempo en lugar del u_* instantáneo. Sin embargo esto se justifica ya que se compara bien con resultados experimentales. En este sentido parece razonable usar sus expresiones para predecir distribución de velocidades y esfuerzo al cortante de fondo pero hay que tener reservas al utilizarlas para otros propósitos.

Vale la pena el advertir al lector que, aún teniendo una solución analítica representada por la ec.VI.29, no es trivial tan solo evaluarla, requiriéndose para ello tablas como las de Abramowitz y

Segun (1965) si se desea evaluar tan solo a una distancia de la pared, pero más realistamente, un programa de computadora para evaluar y graficar la variación con la distancia a la pared. Recuerde que la ec.VI.29 nos brinda la amplitud de la variación armónica del déficit de velocidad, por lo que la solución completa se obtiene al utilizar esta en la ec.VI.23 (considerando la parte real implícita en ella) así como las ecs. VI.8 y VI.9.

VI.2 ESFUERZO AL CORTANTE DE FONDO Y FACTOR DE FRICCIÓN.

Como se verá más adelante, el esfuerzo al cortante en el fondo es de importancia tanto para evaluación de pérdidas de energía por fricción en el fondo, como para evaluación de las características del fondo, en el caso de fondo móvil, creadas por el mismo oleaje. Recuerde que esta fuerza tangencial al fondo por unidad de área del mismo es tanto la que ejerce el fluído sobre el fondo, como la que ejerce el fondo sobre el fluído. A continuación buscamos expresiones explícitas para los casos de capa límite laminar y capa límite turbulenta.

VI.2.1 Flujo laminar.

De acuerdo a la ec. VI-13 y con $\varepsilon_{\zeta} = \nu$ para el caso laminar, el esfuerzo cortante de fondo se calcula con

$$\tau_b(x,t) = \rho\nu \frac{du}{d\zeta} \quad \text{en } \zeta = 0 \quad (\text{VI-33})$$

y substituyendo las ec. VI-19

$$\begin{aligned} \tau_b(x,t) &= \rho\nu \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} U_b \cos(kx-\omega t-\pi/4) \\ &= \rho \sqrt{\omega\nu} U_b \cos(kx-\omega t-\pi/4) \end{aligned} \quad (\text{VI-34})$$

con un valor máximo (o amplitud de la variación armónica)

$$\tau_{b,\max} = \rho \sqrt{\omega \nu} U_b \quad (\text{VI-35})$$

que se presente $\pi/4$ radianes antes que $u_{b,\max} = U_b$ (o sea $T/8$ más temprano).

Introduzcamos al concepto de un factor de fricción, f_w , para oleaje, que relaciona los máximos valores (o amplitudes de la variación oscilatoria) de τ_b y u_b

$$\tau_{b,\max} = \frac{1}{2} f_w \rho U_b^2 \quad (\text{VI-36})$$

que en forma análoga al caso de flujo unidireccional utiliza Jonsson (1966) por primera vez. Comparando las dos expresiones para $\tau_{b,\max}$ se deduce que

$$f_w = 2 \frac{\sqrt{\nu \omega}}{U_b} = \frac{2}{\sqrt{R_b}} \quad (\text{VI-37})$$

donde R_b es el número de Reynold de fondo definido como

$$R_b = \frac{U_b A_b}{\nu} \quad (\text{VI-38})$$

Todas estas expresiones son análogas a las de flujo unidireccional sobre una placa si sustituimos a la distancia desde el borde de la placa por A_b . De la misma manera se anticipa que la capa límite oscilatoria se volverá turbulenta al aumentar R_b . De Jonsson (1966) la capa límite es laminar si

$$R_b < R_{b,\text{crit}} = 1.26 \times 10^4 \quad (\text{VI-39})$$

siempre y cuando la excursión horizontal de las partículas en el fondo