

en la que se encuentre la zona donde fueron generadas originalmente. Ejemplos claros de este efecto pueden observarse en vuelos aéreos sobre zonas costeras cuando las condiciones de iluminación y visibilidad son las adecuadas. Algunos ejemplos dramáticos de fotografías aéreas de este tipo se pueden consultar en el Shore Protection Manual (1977), así como en otros textos o manuales sobre hidráulica marítima o ingeniería costera.

VII.2.2 Refracción con curvas batimétricas rectas y paralelas.

Generalicemos nuestra expresión para olas que avanzan en una dirección arbitraria con respecto al eje x . Para ello consideremos el diagrama en la figura VII.8, donde se muestra tanto un frente de onda (cresta) como un rayo en la dirección de propagación con respecto a un sistema coordenado x - y derecho.

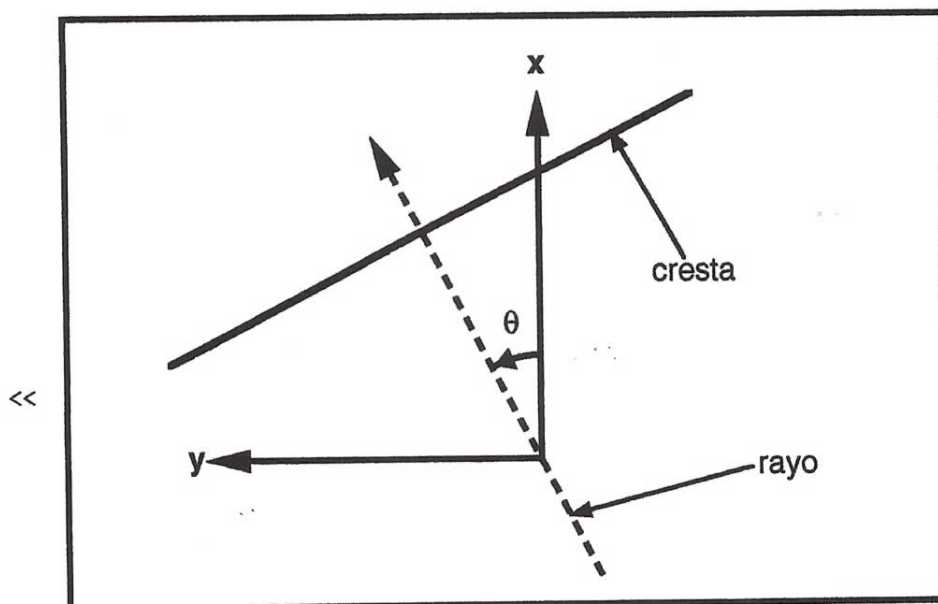


Fig. VII.8. Esquema de definición de la dirección de avance del oleaje, θ .

Puesto que el número de onda puede ser considerado como un vector

$$\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} = k \cos\theta \hat{i} + k \sin\theta \hat{j} \quad (\text{VII-13})$$

y la coordenada en la dirección de avance puede ser también como un vector

$$\vec{X} = x \hat{i} + y \hat{j} \quad (\text{VII-14})$$

el producto kx de las expresiones correspondientes a oleaje propagándose en la dirección $+x$ se generaliza como el producto punto entre ellos, produciendo

$$\eta = a \cos \left(k(\cos\theta) x + k(\sin\theta) y - \omega t \right) \quad (\text{VII-15})$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de avance y el eje x , y k es la magnitud del vector número de onda. Se denomina usualmente a x como la dirección perpendicular y hacia la costa, siendo θ el ángulo de incidencia.

Pensemos ahora en oleaje monocromático pasando sobre un pequeño escalón como el del ejemplo 1 en la sección VII.2.1 en forma oblicua, con subíndice 1 indicando la zona mas profunda y el subíndice 2 la menos profunda. Como ya se vió, por el llamado principio de conservación de olas, ω permanece constante, pero k es una función de la profundidad cambiando su valor de un lado al otro del escalón, $k_1 = k(h_1)$ y $k_2 = k(h_2)$. El oleaje a cada lado del escalón se puede describir con

$$\eta_1 = a_1 \cos (k_1 \cos\theta_1 x + k_1 \sin\theta_1 y - \omega t) \quad (\text{VII-16})$$

$$\eta_2 = a_2 \cos (k_2 \cos\theta_2 x + k_2 \sin\theta_2 y - \omega t + \delta_2) \quad (\text{VII-17})$$

donde δ_2 representa un posible defasamiento sobre el escalón. Supongamos que el escalón es paralelo al eje y y que se encuentra en

$x=0$. Para crestas ininterrumpidas sobre el escalón (algo intuitivamente razonable) se tiene que necesariamente $\delta_2 = 0$; al requerir que no existan discontinuidades en la superficie libre a través del escalón es necesario igualar η_1 y η_2 en $x = 0$,

$$a_1 \cos(k_1 \text{sen}\theta_1 y - \omega t) = a_2 \cos(k_2 \text{sen}\theta_2 y - \omega t) \quad (\text{VII-18})$$

Consideremos ahora un instante cualquiera $t=t_1$. Ambos lados de la ec.VII-18 representan una oscilación sinusoidal de la superficie libre a lo largo del escalón (dirección y). Puesto que la igualdad debe cumplirse en cualquier punto sobre el escalón (para cualquier y), la única forma de que esto ocurra es que ambas variaciones sinusoidales tengan igual longitud de onda y se encuentren en fase, o sea es necesario que los argumentos entre paréntesis sean iguales. De esto se deduce que

$$k_1 \text{sen}\theta_1 = k_2 \text{sen}\theta_2 \quad (\text{VII-19})$$

que se puede interpretar como que la componente en y del vector número de onda se mantiene constante a través de la discontinuidad del fondo. Esto también se puede expresar en forma alternativa como

$$\frac{L_1}{\text{sen}\theta_1} = \frac{L_2}{\text{sen}\theta_2} \quad \text{ó} \quad \frac{C_1}{\text{sen}\theta_1} = \frac{C_2}{\text{sen}\theta_2} \quad (\text{VII-20})$$

Nótese que se despreció cualquier posible reflexión en el escalón, lo que es razonable tan sólo para $\Delta h = h_1 - h_2$ pequeños (estrictamente infinitesimales).

En la región 1 se transporta energía con un ángulo θ_1 con respecto a x y en la región 2 con un ángulo θ_2 . Por lo tanto el transporte en dirección x es

$$E_{F,x_1} = \frac{1}{2} \rho g a_1^2 C_{g,1} \cos\theta_1 \quad \text{en la región 1} \quad (\text{VII-21})$$

$$E_{F,x_2} = \frac{1}{2} \rho g a_2^2 C_{g,2} \cos\theta_2 \quad \text{en la región 2} \quad (\text{VII-22})$$

y por conservación de energía (o constancia de flujo de energía en dirección x) es necesario que

$$E_{F,x_1} = E_{F,x_2} \quad (\text{VII-23})$$

lo que no lleva a

$$\frac{a_2}{a_1} = \underbrace{\sqrt{\frac{C_{g,1}}{C_{g,2}}}}_{K_s} \underbrace{\sqrt{\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}}}_{\text{efecto de cambio de dirección}} \quad (\text{VII-24})$$

donde ahora, en contraste con la ec.VII-8, tenemos una expresión que relaciona la amplitud de oleaje en ambos lados de una discontinuidad de profundidad que considera oleaje incidente oblicuo, adhiriendo el factor que considera el efecto de cambio de dirección de propagación.

Considerando a la costa como una serie de escalones infinitesimales las ecuaciones VII-19 o VII-20 pueden aplicarse sucesivamente a cada uno, por ejemplo

$$\frac{C_1}{\text{sen}\theta_1} = \frac{C_2}{\text{sen}\theta_2} = \frac{C_3}{\text{sen}\theta_3} = \dots = \frac{C_1}{\text{sen}\theta_1} \quad (\text{VII-25})$$

llegándose a la conclusión que estas ecuaciones se pueden aplicar entre cualesquiera 2 puntos siempre que todas las curvas batimétricas sean paralelas y normales a la dirección x (misma que por definición es perpendicular a la costa). Seleccionando la estación 1 en aguas profundas (subíndice 0) y la estación 2 en otro punto arbitrario (sin subíndice) se tiene de las ecs. VII-19 y VII-20 que

$$\frac{C}{\text{sen}\theta} = \frac{C_0}{\text{sen}\theta_0} = \text{constante} \quad \text{Ley de Snell} \quad (\text{VII-26})$$

o alternativamente

$$\frac{L}{\text{sen}\theta} = \frac{L_0}{\text{sen}\theta_0} = \text{constante} \quad (\text{VII-27})$$

$$k \text{ sen}\theta = k_0 \text{ sen}\theta_0 = \text{constante} \quad (\text{VII-28})$$

Como L decrece para h decreciente, $\text{sen}\theta$ también lo hace, o sea los rayos tienden a ser normales a la costa.

Nótese que, estrictamente, la ley de Snell es válida sólo para batimetría recta y paralela.

El flujo de energía entre aguas profundas y algún otro punto arbitrario (despreciando posibles pérdidas de energía por fricción interna o en el fondo o por rompientes) es constante dentro de un *canal de energía* determinado (limitado por dos rayos, puesto que la energía de oleaje se transmite a lo largo y no a través de ellos), o sea

$$E_{F,x} = E_F \cos\theta = E_{F,0} \cos\theta_0 = \text{constante} \quad (\text{VII-29})$$

que es independiente de la teoría de oleaje usada. Para teoría lineal (de ec.VII-24).

$$\begin{aligned} \frac{H}{H_0} &= \sqrt{\frac{C_{g,0}}{C_g}} \sqrt{\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}} \\ &= K_S \sqrt{\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}} = K_S K_R \end{aligned} \quad (\text{VII-30})$$

donde K_R es un coeficiente de refracción para batimetría recta y paralela.

Como θ se reduce al reducirse h , el efecto es la reducción de la altura de ola. Esto se debe a que los rayos (a través de los cuales no se transporta ninguna energía) se separan conforme se acercan al litoral ampliándose el *área hidráulica del pasillo de energía* entre 2 rayos, ver por ejemplo la figura VII.6.

Es conveniente puntualizar que, dado que el flujo de energía de oleaje se definió por ancho unitario, en la ec.VII-29, los términos $\cos\theta$ y $\cos\theta_0$ representan el ancho de un *pasillo de energía* que tiene longitud unitaria en dirección paralela al eje y (en un punto arbitrario y en aguas profundas respectivamente), como se esquematiza en la figura VII.9.

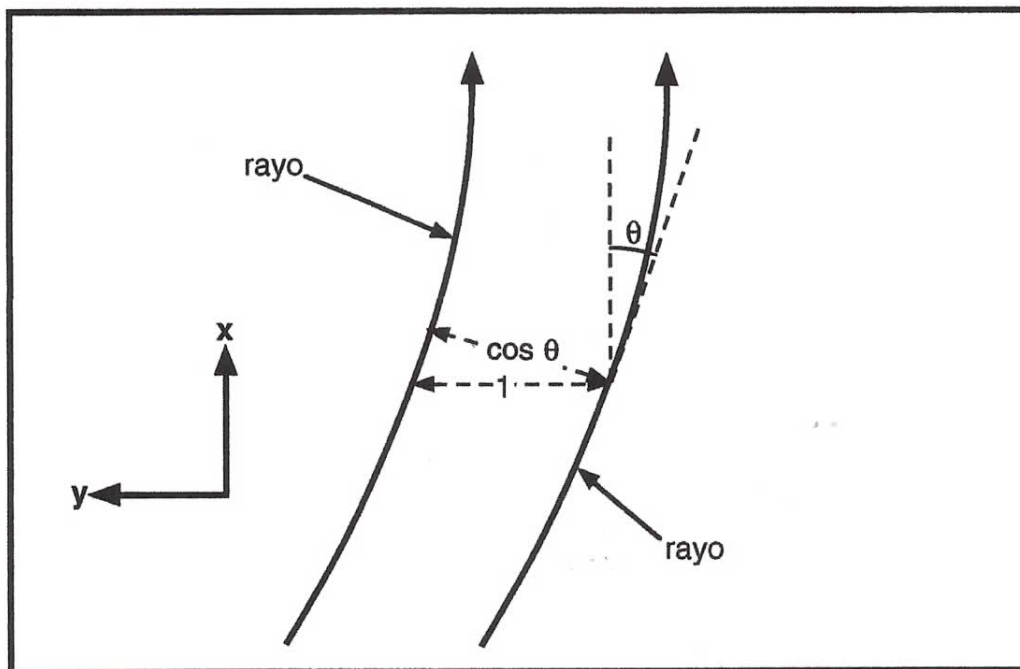


Fig. VII.9. Interpretación del factor $\cos\theta$ como el ancho de un *pasillo de energía*.

Una forma alternativa de presentar este principio de conservación de energía entre cualesquiera dos puntos es

$$E_{F,1} b_1 = E_{F,2} b_2 = \text{constante} \quad (\text{VII-31})$$

donde b representa el ancho local de este *pasillo de energía*.

Nótese que $\cos \theta_1 / \cos \theta_2$ es la relación de anchos del *pasillo de energía* en las posiciones 1 y 2. Efectivamente, en el caso general (batimetría arbitraria), el coeficiente de refracción también es la raíz cuadrada de la relación de anchos del *pasillo de energía*

$$K_R = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \quad (\text{VII-32})$$

Cómo obtener este b_1/b_2 en el caso arbitrario se verá en la sección VII.2.4.

VII.2.3 Métodos gráficos tradicionales (seguimiento de rayos).

Los métodos gráficos tradicionales, inclusive tratándose de batimetría arbitraria, consisten básicamente en:

- a) Suavizar las curvas batimétricas para evitar cambios bruscos de dirección (más sobre esto posteriormente).
- b) Localizar el ángulo de incidencia de oleaje en aguas profundas para varios puntos discretos (en $h/L = 0.5$) así como establecer la frecuencia (o las frecuencias) de interés.
- c) Continuación de cada rayo desde el límite de aguas profundas hasta la primera curva batimétrica disponible en el mapa o plano (manteniendo su dirección original).
- d) Aplicación local (aunque estrictamente incorrecta) de la ley de Snell para obtener el ángulo de salida de cada rayo de la curva batimétrica.

- e) Continuación de cada rayo hasta la siguiente curva batimétrica, manteniendo constante la dirección calculada en (d).
- f) Repetición de (d) y (e) hasta alcanzar la costa o cruzarse dos rayos.

La figura VII.10, ilustra de manera esquemática el proceso descrito a través de numerar en el diagrama los pasos seguidos cronológicamente.

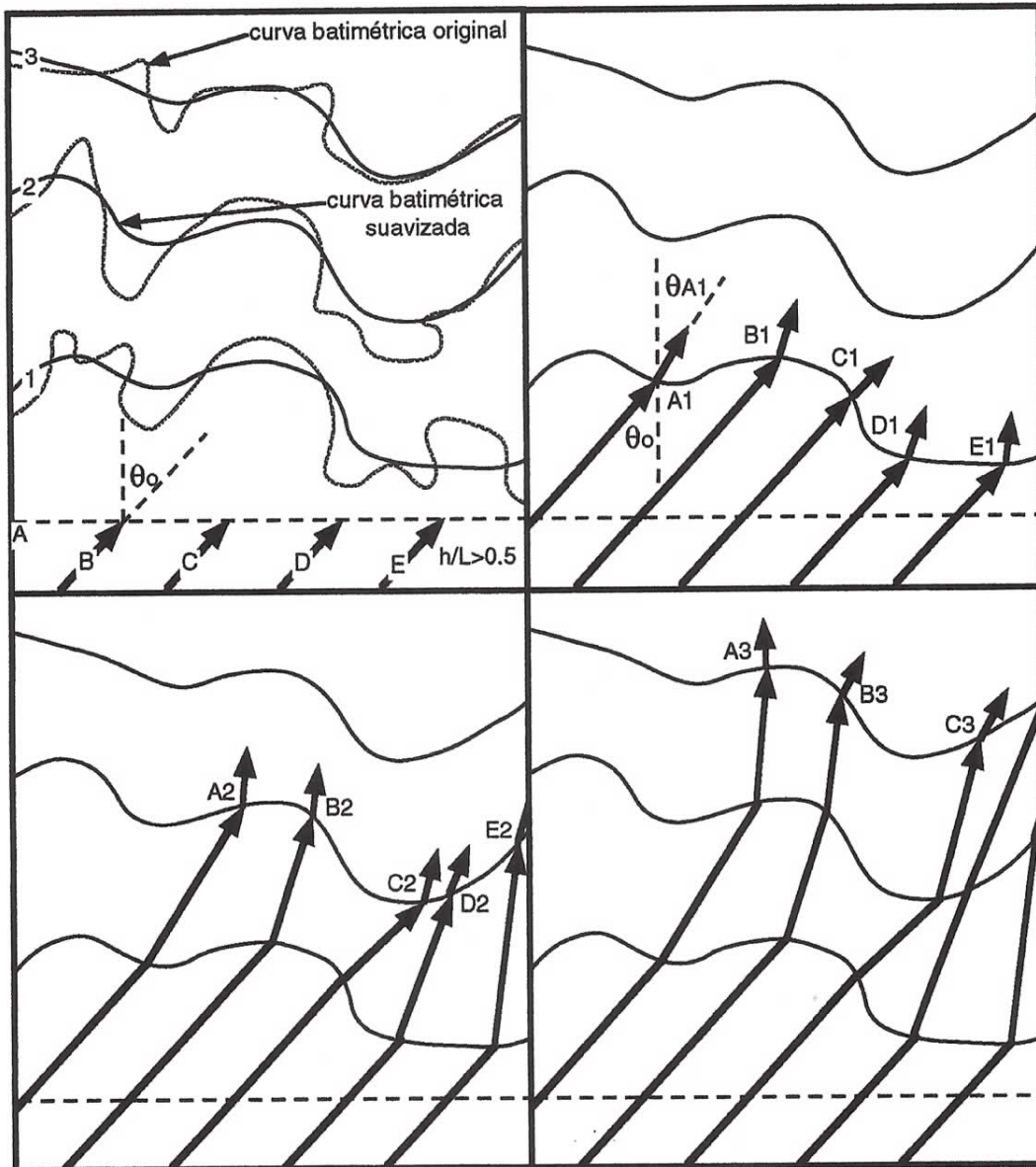


Fig. VII.10. Esquema ilustrativo del proceso gráfico tradicional para la elaboración de diagramas de refracción.

El paso (a) se realiza para acercarse a las hipótesis restrictivas de aplicación de la ley de Snell (aplicada en el punto (d)), ya que las curvas suavizadas pueden considerarse localmente como segmentos de rectas (y siendo optimista) casi paralelos. Esto se realiza en labores ingenieriles bajo la hipótesis de que pequeñas y abruptas variaciones

en la morfología de la costa no determinan significativamente el campo de oleaje resultante a una escala espacial comparable con varias longitudes de onda del oleaje de interés.

Esta aplicación liberal de la ley de Snell da resultados aceptables cuando las variaciones en la batimetría son de un orden de magnitud mayor a la longitud de onda, o sea que con un horizonte de visión de escala L las curvas batimétricas puedan considerarse como rectas y paralelas. Hoy en día, con el advenimiento de la computación digital esto no es necesario, ni conveniente, excepto para cálculos gruesos que no se repetirán para varias frecuencias o direcciones de incidencia en aguas profundas.

Dadas estas circunstancias, la descripción del campo de oleaje refractado será mas detallada, cuanto más curvas batimétricas se tengan y más rayos se calculen. Sin embargo, el problema de la aplicación de la ley de Snell a batimetría arbitraria no se resuelve simplemente aumentando la resolución del cálculo.

VII.2.4 Teoría general de refracción.

La nomenclatura usada en el siguiente desarrollo se muestra en el diagrama de la figura VII.11, donde 2 posiciones de una misma cresta y 2 rayos se muestran. Las posiciones mostradas son para $t=0$ y $t=\delta t$. Las variables s y f son coordenadas ortogonales curvilíneas en dirección del avance y de la cresta y en dirección del frente respectivamente.

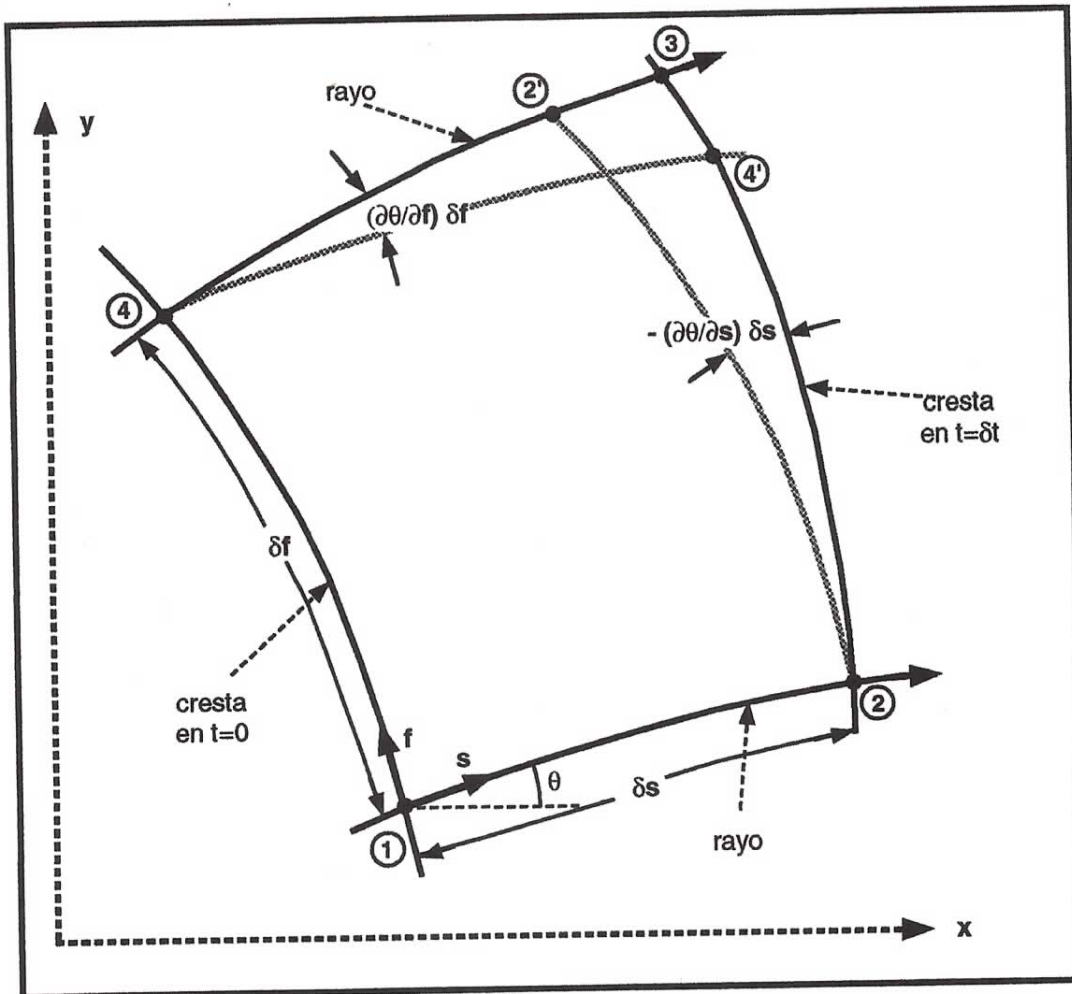


Fig. VII.11. Diagrama de definición de nomenclatura para la teoría general de refracción.

En la figura VII.11, el segmento 1-2 es el avance de la cresta en el intervalo δt , simbólicamente

$$\text{segmento 1-2} = \delta s = c \delta t \quad (\text{VII-33})$$

mientras el segmento 1-4 es la distancia original entre los dos rayos sobre la cresta en el tiempo $t=0$

$$\text{segmento 1-4} = \delta f \quad (\text{VII-34})$$

y el segmento 2-3 es la distancia entre ellos, pero sobre la cresta ya desplazada (en $t=\delta t$)

$$\text{segmento 2-3} = \delta f + \frac{\partial(\delta f)}{\partial s} \delta s \quad (\text{VII-35})$$

El segmento 4-3 es el desplazamiento de la cresta, pero considerando el cambio de orientación de la cresta (las líneas de cresta original y desplazada no son paralelas), o sea

$$\begin{aligned} \text{segmento 4-3} &= \delta s + \frac{\partial(\delta s)}{\partial f} \delta f = & (\text{VII-36}) \\ &= c\delta t + \frac{\partial(c\delta t)}{\partial f} \delta f = \left(c + \frac{\partial c}{\partial f} \delta f \right) \delta t \end{aligned}$$

Observe que el segmento punteado 4-4' es paralelo al rayo inferior y que el segmento punteado 2-2' es paralelo a la cresta original. Dado esto, el pseudo-triángulo 2-2'-3 representa la diferencia de orientación entre las crestas original y desplazada, así como el pseudo-triángulo 4-4'-3 representa la diferencia de orientación entre los rayos.

Denominando el ángulo local de un rayo con la dirección x como θ , de la figura VII.11 tenemos

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \\ \theta_2 &= \theta + \frac{\partial\theta}{\partial s} \delta s \\ \theta_4 &= \theta + \frac{\partial\theta}{\partial f} \delta f \end{aligned} \quad (\text{VII-37})$$

Considerando al pseudo-triángulo 4-4'-3, el lado 4'-3 tiene una longitud

$$\frac{\partial \theta}{\partial f} \delta f \delta s = \frac{\partial (\delta f)}{\partial s} \delta s \quad (\text{VII-38})$$

donde cada miembro representa una forma alternativa. Por lo tanto

$$\frac{\partial \theta}{\partial f} \delta_f = \frac{\partial (\delta f)}{\partial s} \quad (\text{VII-39})$$

En forma similar, del pseudo-triángulo 2-2'-3, se concluye que

$$- \frac{\partial \theta}{\partial s} \delta s = \frac{\partial (\delta s)}{\partial f} \quad (\text{VII-40})$$

y considerando la ec.VII-33

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial f} \quad (\text{VII-41})$$

El mapeo entre el sistema coordenado s-f y el sistema coordenado x-y nos da

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{VII-42})$$

$$\frac{\partial}{\partial f} = - \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{VII-43})$$

Si denominamos las coordenadas sobre un rayo específico (x_r, y_r) y seguimos un punto sobre el rayo *montado* sobre la cresta tenemos

$$\frac{dx_r}{dt} = c \cos \theta \quad (\text{VII-44})$$

$$\frac{dy_r}{dt} = c \sin \theta \quad (\text{VII-45})$$

y de la ec.VII-41, puesto que cuando $\delta t \rightarrow 0$, $\delta s = c \delta t = c dt$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{c} \frac{d\theta}{dt} = - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial f} \quad (\text{VII-46})$$

de donde se concluye directamente que

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial c}{\partial f} \quad (\text{VII-47})$$

que considerando la ec.VII-43 se puede expresar como

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{sen } \theta \frac{\partial c}{\partial x} - \text{cos } \theta \frac{\partial c}{\partial y} \quad (\text{VII-48})$$

Dado que en el problema general planteado la profundidad es función de x y y , $h=h(x,y)$, y puesto que la celeridad de la onda es función de la frecuencia y de la profundidad, $c=c(\omega,h)$, dada una sola frecuencia de interés, se puede visualizar a la celeridad como un campo que varía con x y y , $c=c(x,y)$. En otras palabras, conocida la frecuencia de interés y la batimetría, se puede encontrar el *campo* de celeridades $c(x,y)$.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo ecs. VII-44, VII-45 y VII-48, en las incógnitas x_r , y_r , θ son suficientes para definir la trayectoria de un rayo cuyas condiciones iniciales son x_{r0} , y_{r0} , θ_0 .

Un programa de computadora que resuelva numéricamente las ecs. VII-44, VII-45 y VII-48, para un grupo de rayos comenzando de aguas profundas hacia la costa, sería un método automático para generar el *diagrama de refracción de oleaje*. Con este diagrama hecho y midiendo la separación entre rayos, se puede obtener $K_R = (b_0/b)^{1/2}$, y a partir de la profundidad local, $K_S = (C_{g0}/C_g)^{1/2}$ y la altura de ola se puede obtener a lo largo de los rayos.

$$H(x_r, y_r) = K_S K_R H_0 \quad (\text{VII-49})$$

Cuando solo un diagrama de refracción (o sea una sola condición de