

X. OLEAJE ALEATORIO.

X.1 INTRODUCCION

La simple observación de la superficie del mar indica una cierta aleatoriedad que de ninguna manera se explica a través de las ondas monocromáticas o de amplitud suavemente modulada vistas en los capítulos anteriores. Sin embargo esta superficie libre aparentemente caótica se puede simular adecuadamente por medio de la superposición de ondas sinusoidales monocromáticas de diferentes frecuencias. Por medio de esta superposición se obtiene un registro de olas irregulares similar, al observado en mediciones en campo, ver fig. X.1. Además, la observación del mar con sus características olas de cresta corta, ver fig. X.2, indica que simultáneamente se encuentran ondas viajando en diferentes direcciones, además de diferentes frecuencias. En este sentido la superficie irregular del mar se puede simular a través de

$$\eta(x,y,t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \cos(k_j \cos\theta_i x + k_j \sin\theta_i y - \omega_j t - \phi_{ij}) \quad (X-1)$$

donde el subíndice "j" indica frecuencia y el subíndice "i" indica dirección, siendo θ_i el ángulo entre la dirección de propagación del oleaje y el eje coordenado x. Bajo esta perspectiva tanto J como I representan un número suficientemente grande de frecuencias o direcciones de propagación para representar las principales componentes presentes en la realidad. En forma alternativa, considerando cada frecuencia en cada dirección como una componente independiente la superficie libre se puede describir a través de

$$\eta(x,y,t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(k_n \cos\theta_n x + k_n \sin\theta_n y - \omega_n t - \phi_n) \quad (X-2)$$

en donde el subíndice n identifica al número de componente. I, J, y N se establecen como número finitos en la práctica aunque en desarrollos matemáticos pueden considerarse como infinito (i.e. existen un número

infinito de frecuencias y/o direcciones presentes).

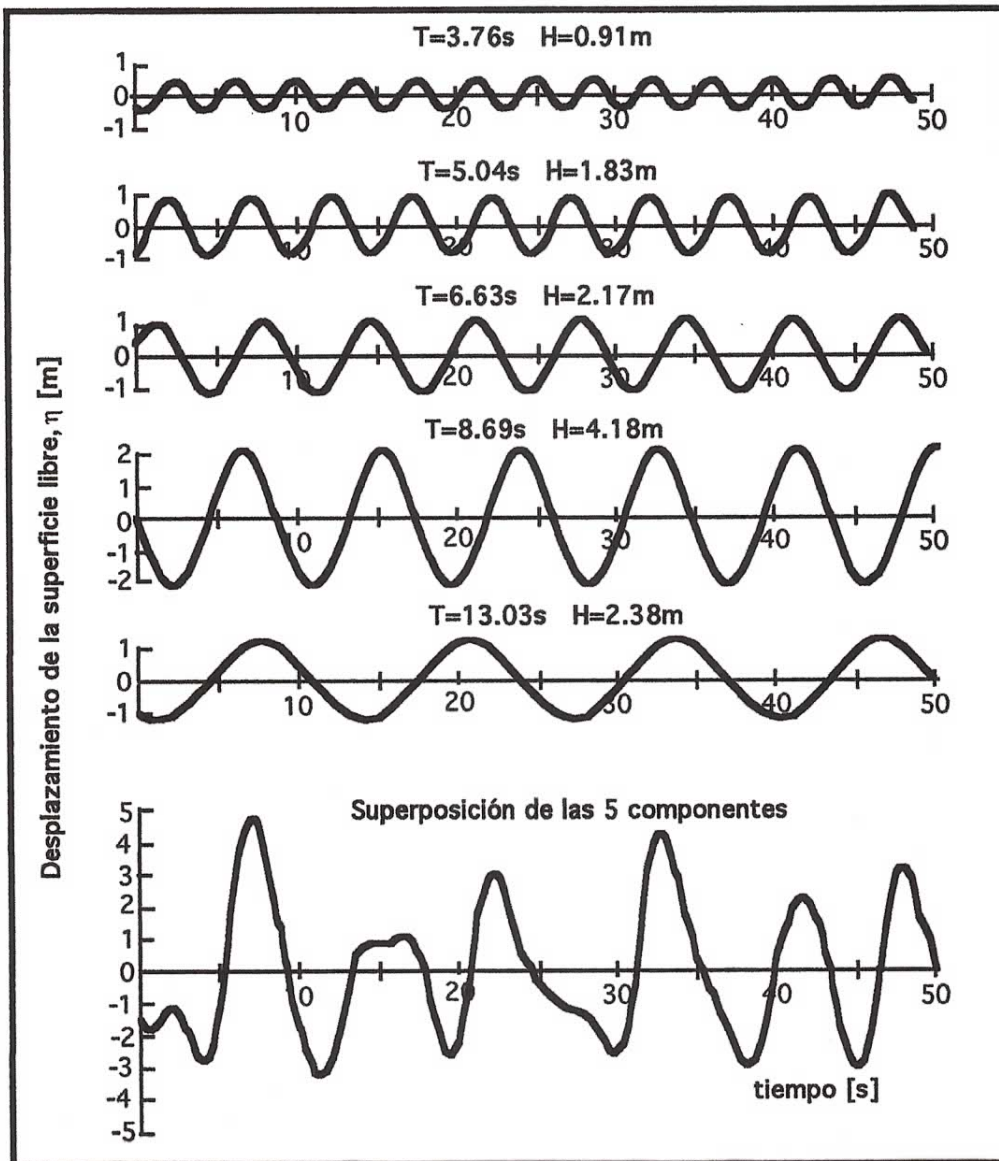


Fig. X.1. Simulación del estado de la superficie libre a través de la superposición de componentes monocromáticas (fuente: Goda, 1985).

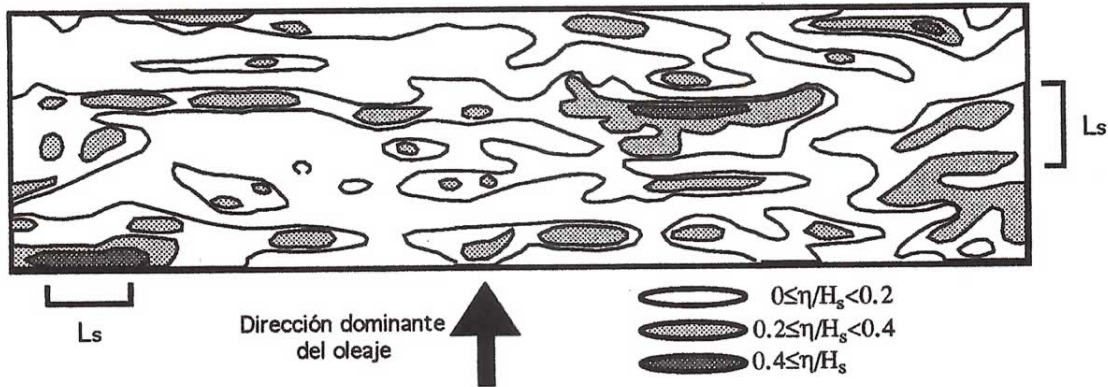


Fig.X.2. Mapa de desplazamiento de la superficie libre en condiciones realistas. La falta de crestas continuas se debe a la composición por trenes de olas avanzando en diferentes direcciones alrededor de la dominante. Las regiones dentro de los contornos representan zonas con desplazamiento η positivo en el instante en cuestión. H_s y L_s son la altura y longitud de onda de la "ola significativa". Fuente: Goda (1985).

En la práctica ingenieril se ha acostumbrado durante mucho tiempo el caracterizar un cierto estado del mar a través de una ola monocromática equivalente. Esta ha sido con frecuencia la llamada *ola significativa* que coincide con aquella reportada por observadores experimentados en barcos y mas estrictamente corresponde a un promedio del tercio de las olas mas altas observadas como eventos individuales.

La superposición mencionada es la piedra angular del tratamiento que se dará al oleaje oleatorio y esta presupone que las ondas componentes son independientes, o sea utiliza la premisa de superposición directa válida solo para teoría lineal. Para olas no lineales se presentan armónicos a $\omega_n, 2\omega_n, 3\omega_n, \dots$, dependiendo del orden de la teoría, pero estos no son independientes pues los armónicos a $2\omega_n, 3\omega_n, \dots$, estan asociados al de ω_n y viajan anclados a éste (el tema se tratará ampliamente en el capítulo XI). Es importante el enfatizar que la descripción que haremos se limita al dominio de validez aceptable para la teoría lineal y que bajo ésta el principio de superposición es aplicable, pues de esta manera se puede obtener una descripción de cualquiera de los campos ya tratados anteriormente, como velocidad horizontal, velocidad vertical, presión, órbitas, etc. Por ejemplo, para calcular el campo de presiones bajo una

superficie libre irregular, bastará superponer los campos de presiones producidos por cada una de las componentes individuales que conforman el estado del mar. Esta superposición se hace en base a las ecuaciones vistas en el capítulo III en forma similar a las ecs. X-1 y X-2 en referencia a la superficie libre η .

Es necesario hacer énfasis que la superposición de muchas componentes infinitesimales para producir oleaje irregular finito no elimina los efectos no lineales del oleaje por lo que estrictamente la teoría será aplicable a ondas compuestas de pequeña amplitud (en comparación con su longitud). Sin embargo en la práctica esta herramienta se utiliza con éxito para oleaje de amplitud considerable.

Para mayor profundidad se recomienda consultar a Dean y Dalrymple (1984), Goda (1985) y Kinsman (1965) entre otros.

X.2 ANALISIS Y ESTADISTICAS DE OLAJE EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

X.2.1 Identificación de olas en un registro.

Imaginemos que tomamos un registro en el tiempo del desplazamiento de la superficie del mar en un cierto lugar. El registro podría verse como el de la fig. X.3. Si las condiciones del mar que medimos se caracterizan por un *espectro de banda angosta*, es decir por componentes todas ellas cercanas a una cierta frecuencia, el registro presentará una apariencia como el de una onda monocromática de amplitud rápidamente variable, o en otras palabras, cada oscilación de la superficie libre cruzará el nivel medio del registro. El límite de un espectro de banda angosta es una ola monocromática (banda de ancho cero) mientras que en el otro sentido (banda ancha) se encuentra el llamado *ruido blanco* que presenta una distribución uniforme de componentes frecuenciales de $\omega = 0$ a $\omega \rightarrow \infty$. La figura X.4 muestra en forma contrastada el contenido frecuencial de estos diferentes estados del mar.

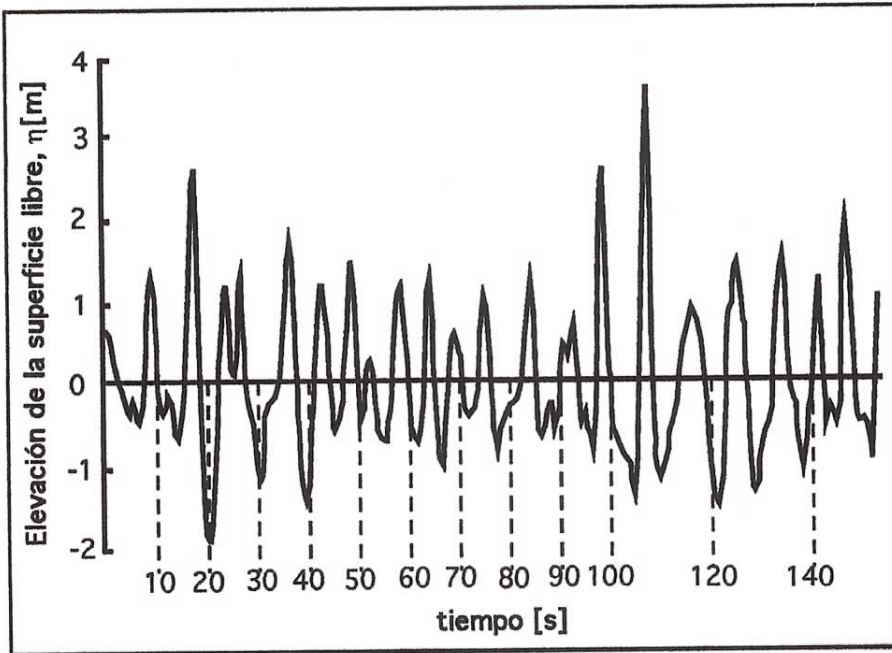


Fig. X.3. Ejemplo de un registro de oleaje (fuente: Goda, 1985).

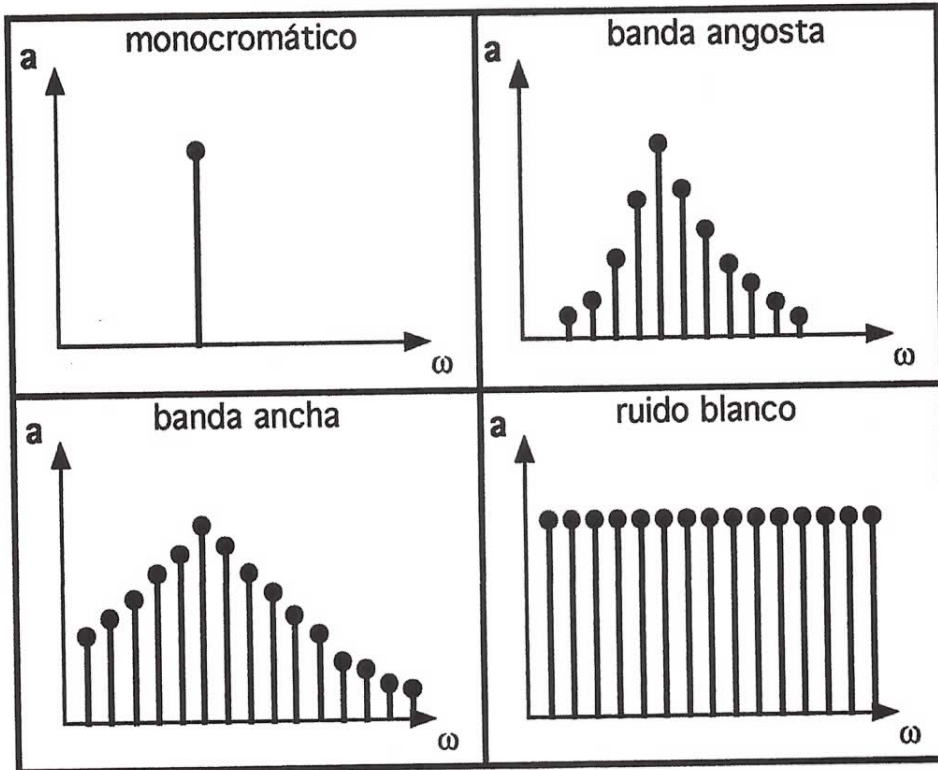


Fig. X.4. Contenido frecuencial para diferentes estados de la superficie libre.

La herramienta analítica que veremos es estrictamente válida solo para condiciones de espectro de banda angosta.

La identificación de las olas individuales de un registro son el primer paso para obtener estadísticas del registro. Para ello es necesario el encontrar el nivel medio del registro. Acto seguido se identifica a una ola individual como la porción del registro que se encuentra entre dos cruces hacia arriba (o alternativamente hacia abajo) del registro con el nivel medio, asociándose una altura y período a cada ola individual. Estos se muestra esquemáticamente en la fig. X.5.

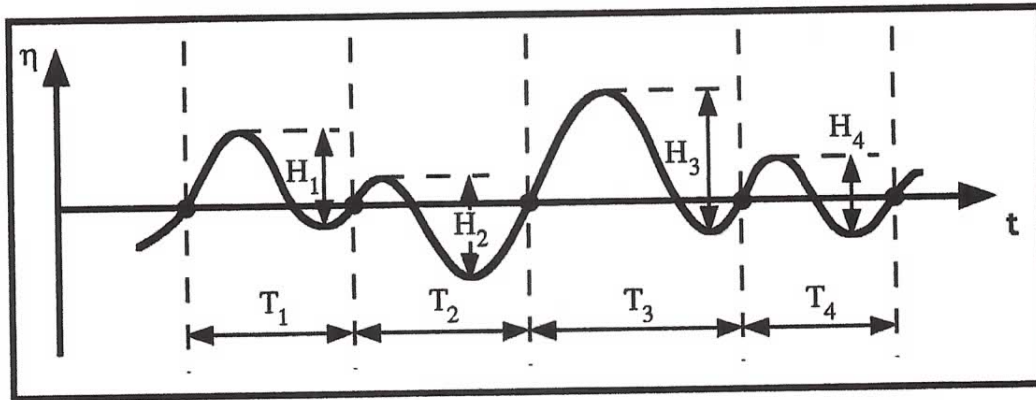


Fig. X.5. Identificación de olas individuales en un registro.

Si el registro es una *fotografía instantánea* del perfil de la superficie libre, una técnica similar se puede seguir en el registro $\eta(x)$ para identificar olas individuales así como su altura y longitud asociada.

X.2.2 Estadísticas elementales de un registro.

Si ordenamos a las N olas individuales identificadas en un registro en una lista de altura de ola descendente, estaremos listos para obtener estadísticas elementales. Por ejemplo la altura y período medios serán

$$\bar{H} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i \quad \bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i \quad (X-3)$$

y los valores *raíz media cuadrática*, que serán identificados con el subíndice *rms* (por sus siglas en inglés *root mean square*)

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i^2} \quad T_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i^2} \quad (X-4)$$

Otras estadísticas usuales, u olas monocromáticas representativas, son los promedios de la fracción p de las olas de mayor altura en la lista. Por ejemplo para la ola significativa que se define como el promedio del tercio de las olas más altas, o sea $p=1/3$

$$H_s = H_{1/3} = \frac{1}{N/3} \sum_{i=1}^{N/3} H_i \quad T_s = T_{1/3} = \frac{1}{N/3} \sum_{i=1}^{N/3} T_i \quad (X-5)$$

Observe que por su propia definición $p \leq 1$ y que los valores medios, \bar{H} y \bar{T} , coinciden precisamente con el valor límite $p=1$

Otra ola comunmente usada, dando énfasis al extemo de las olas más altas, es el promedio del 1/10 de olas mayores es

$$H_{1/10} = \frac{1}{N/10} \sum_{i=1}^{N/10} H_i \quad T_{1/10} = \frac{1}{N/10} \sum_{i=1}^{N/10} T_i \quad (X-6)$$

o la ola máxima definida para $n = N$

$$H_{\max} = H_{1/N} = \frac{1}{N/N} \sum_{i=1}^{N/N} H_i = \sum_{i=1}^1 H_i = H_1 \quad (X-7)$$

$$T_{\max} = T_{1/N} = \frac{1}{N/N} \sum_{i=1}^{N/N} T_i = \sum_{i=1}^1 T_i = T_1$$

Nótese que en todos los cálculos de período (o alternativamente de la frecuencia, la longitud o número de onda) el número de orden se refiere al ordenamiento por alturas descendentes; o sea $T_{\max} = T_{1/N}$ no necesariamente es igual al máximo período observado en el registro, sino al período observado para la ola de altura máxima y $T_{1/3}$ corresponde al promedio del tercio de las olas más altas y no al promedio del tercio de las olas con mayor período.

De una muestra de la población como estos registros finitos las estimaciones de la probabilidad de que una ola sobrepase la altura \hat{H} es

$$P(H \geq \hat{H}) = \frac{n}{N} \quad (X-8)$$

donde n es el número de olas en el registro con $H > \hat{H}$ (o el número de orden de la ola mas cercana a \hat{H} sin ser menor a ella). Nótese que bajo esta definición la estimación de la ola máxima es

$$P(H \geq H_{\max}) = \frac{1}{N} \quad (X-9)$$

o sea depende del tamaño de la muestra N. Esto implica que si dos registros de N y M olas respectivamente con $M > N$ tiene una ola máxima igual, la estimación de $P(H \geq H_{\max})$ de cada registro será diferente con el registro de M olas mostrando una probabilidad $(1/M)$ menor que el de N olas $(1/N)$.

X.2.3 Distribución de probabilidad de H para un tren de amplitud modulada.

En el caso más simple de oleaje no monocromático, o sea un grupo regular de olas, la posición de la superficie libre esta dada por (ver capítulo III):

$$\begin{aligned} \eta(t) &= H \cos(\omega - \Delta\omega)t + H \cos(\omega + \Delta\omega) t \\ &= \left[2H \cos \Delta\omega t \right] \cos \omega t \end{aligned} \quad (X-10)$$

donde la expresión entre corchetes representa la *envolvente de la amplitud* de las olas en el grupo.

En este caso particular, para estudiar la distribución de alturas, es necesario manejar unicamente a la envolvente que se repite con periodicidad $T_{\text{envolvente}} = \pi / \Delta\omega$. Por lo tanto, si iniciamos de un antinodo ($\Delta\omega t = 0$) y avanzamos hacia el siguiente nodo ($\Delta\omega t = \pi/2$) las olas ya se encuentran ordenadas de mayor a menor altura por lo que considerando esta porción como un registro de olas, H_p se puede calcular como

$$H_p = \frac{1}{p \frac{\pi}{2\Delta\omega}} \int_0^{p \frac{\pi}{2\Delta\omega}} 2H \cos \Delta\omega t \, dt = \frac{4H}{p\pi} \text{sen} \frac{p\pi}{2} \quad (X-11)$$

o sea el promedio de la fracción p de las olas mas grandes, pero ahora

efectuado sobre la envolvente continúa en lugar de las olas individuales en un registro experimental. El valor H_{rms} se puede calcular (en forma análoga a la sección X.2.2) como

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{\pi/2\Delta\omega} \int_0^{\pi/2\Delta\omega} 4H^2 \cos^2 \Delta\omega t dt} \quad (X-12)$$

$$= \sqrt{2} H$$

El valor de H_p en términos de H_{rms} (que como una ola monocromática representativa es mas congruente con la descripción de oleaje irregular que la simple altura H de una de las componentes) es

$$H_p = \frac{2 \sqrt{2} H_{rms}}{p\pi} \operatorname{sen} \frac{p\pi}{2} \quad (X-13)$$

por ejemplo

$$p = 1 \quad H_1 = \bar{H} = 0.9 H_{rms}$$

$$p = 1/3 \quad H_{1/3} = H_s = 1.35 H_{rms} \quad (X-14)$$

$$p = 1/10 \quad H_{1/10} = 1.408 H_{rms}$$

También sabemos que en el tren de olas

$$H_{max} = 2H = 2H_{rms} / \sqrt{2} \quad (X-15)$$

y por lo tanto

$$H_{max} = \sqrt{2} H_{rms} \approx 1.414 H_{rms} \quad (X-16)$$

X.2.4 Distribución de probabilidad de altura de ola para un espectro de banda angosta.

Siguiendo un análisis similar al del grupo de olas pero ahora para un número mayor de componentes frecuenciales todas ellas cercanas a una

cierta frecuencia *central* y suponiendo que la probabilidad de que $\eta(t)$ se encuentre a un cierto nivel arbitrario tiene una distribución normal, que las componentes son estadísticamente independientes y que se tiene un gran número de ellas, se puede demostrar (Longuet-Higgins, 1952) que la probabilidad de tener una altura de ola mayor o igual a un valor arbitrario \hat{H} esta dada por

$$P(H \geq \hat{H}) = e^{-\left(\frac{\hat{H}}{H_{rms}}\right)^2} \quad (X-17)$$

que es la distribución de probabilidad acumulada conocida como Rayleigh. En este caso H_{rms} debe ser interpretado como un parámetro (y el único) de dicha distribución de probabilidad.

La función de densidad de probabilidad correspondiente (o sea $P(\hat{H} \leq H \leq \hat{H} + d\hat{H})$ cuando $d\hat{H} \rightarrow 0$) se obtiene derivando $P(H \leq \hat{H})$ con respecto a \hat{H}

$$\begin{aligned} p(H) &= \frac{d}{d\hat{H}} (1 - P(H \geq \hat{H})) = \frac{d}{d\hat{H}} \left(1 - e^{-\left(\frac{\hat{H}}{H_{rms}}\right)^2} \right) \\ &= \frac{2 H}{H_{rms}^2 e^{-\left(\frac{H}{H_{rms}}\right)^2}} \end{aligned} \quad (X-18)$$

Las mediciones en el campo muestran que aún cuando un registro individual no se aproxima mucho a esta distribución (ver fig. X.6) el promedio de distribuciones de frecuencia de muchos registros si lo hace (ver fig. X.7).

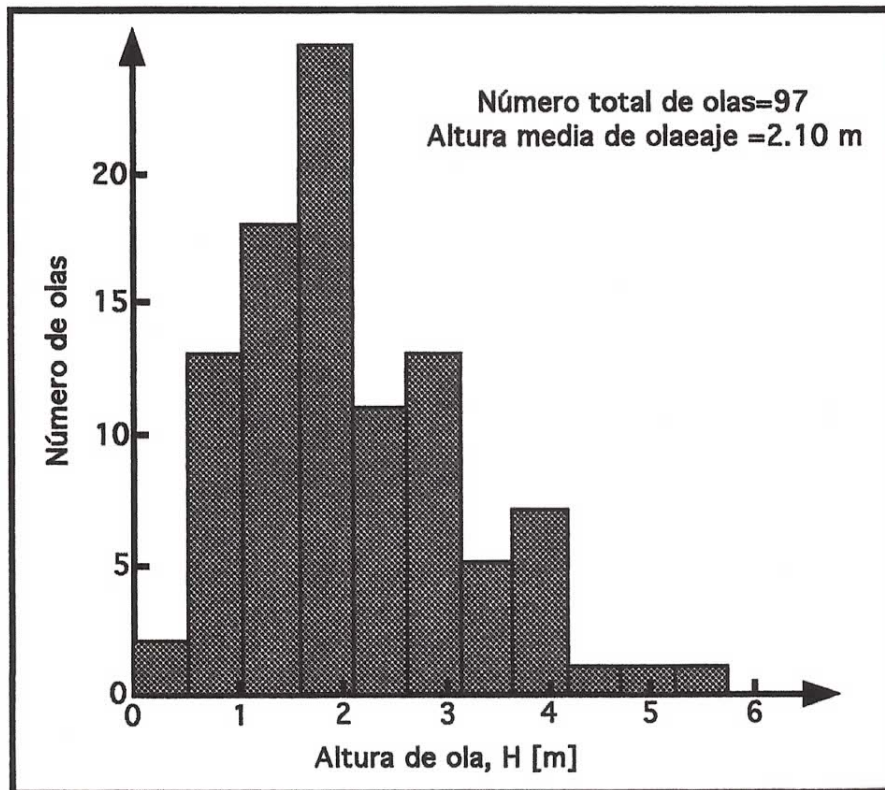


Fig. X.6. Histograma de altura de ola para un solo registro (fuente: Goda, 1985).

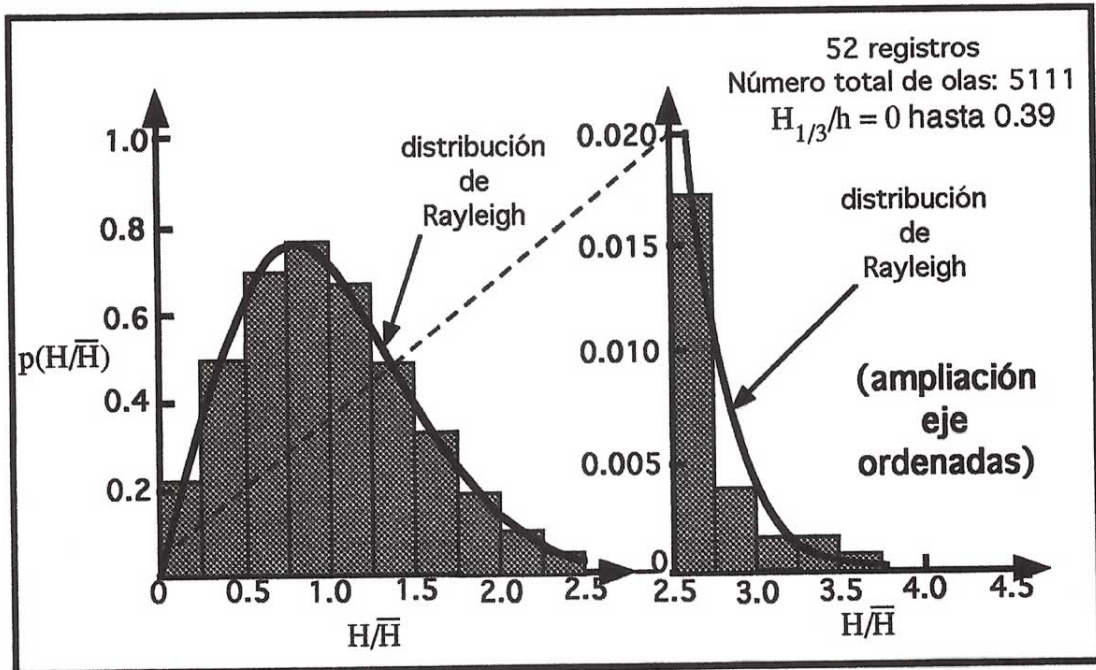


Fig. X.7. Histograma de alturas de oleaje (normalizadas) para la composición de muchos registros, comparado con la distribución de probabilidad de Rayleigh (fuente: Goda, 1985).

La distribución de densidad de probabilidad Rayleigh se muestra en la fig. X.8. Como puede observarse permite valores indefinidamente grandes de H aunque con probabilidades muy bajas. H_{moda} , el valor más común (en el pico de la distribución) corresponde a

$$H_{\text{moda}} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\text{rms}} \quad (\text{X-19})$$

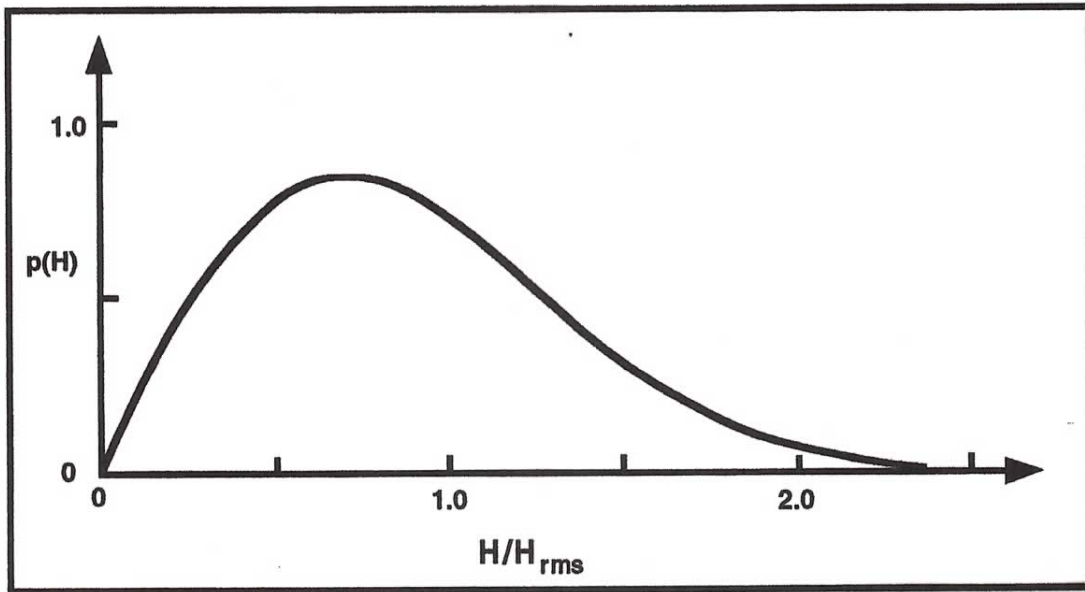


Fig. X.8. Distribución de probabilidad de Rayleigh: El El área bajo la curva es igual a 1 (fuente: Dean y Dalrymple, 1984).

El valor medio \bar{H} es

$$\bar{H} = \frac{\int_0^{\infty} p(H) H dH}{\int_0^{\infty} p(H) dH} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_{rms} \approx 0.866 H_{rms} \quad (X-20)$$

Para obtener H_p , o sea el valor límite inferior de la fracción p de las olas más altas, recordemos que de un registro éste se obtiene como

$$P(H \geq \hat{H}) = \frac{n}{N} \quad (X-21)$$

Igualando con la distribución acumulada se tiene

$$P(H \geq \hat{H}) = \frac{n}{N} = e^{-(\hat{H}/H_{rms})^2} \quad (X-22)$$

de donde

$$\hat{H} = H_{rms} \sqrt{\ln \frac{N}{n}} = H_{rms} \sqrt{\ln \frac{1}{p}} \quad (X-23)$$

que representa la altura \hat{H} sobre la que la fracción p de las olas es mayor o igual.

Utilizando esto en los límites de la expresión para obtener H_p

$$H_p = \frac{\int_{\hat{H}_p}^{\infty} H P(H) dH}{\int_{\hat{H}_p}^{\infty} p(H) dH} = \frac{\int_{\hat{H}_p/H_{rms}}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx}{\int_{\hat{H}_p/H_{rms}}^{\infty} x e^{-x^2} dx} \quad (X-24)$$

¡¡¡¡!

donde en el miembro derecho se ha hecho el cambio de variable de \hat{H}_p a \hat{H}_p/H_{rms} . Realizando la integral se obtiene

$$\frac{H_p}{H_{rms}} = \sqrt{\ln \frac{1}{p}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\ln \frac{1}{p}} \right] \quad (X-25)$$

Con esta expresión se obtiene para

$$\begin{aligned} p = 1 & \quad H_1 = \hat{H} \approx 0.886 H_{rms} \\ p = 1/3 & \quad H_{1/3} = H_s \approx 1.416 H_{rms} \\ p = 1/10 & \quad H_{1/10} \approx 1.8 H_{rms} \end{aligned} \quad (X-26)$$

En cuanto a H_{max} , no tiene sentido especificar un valor máximo en forma determinística, ya que la distribución Rayleigh tiene un dominio abierto hacia $+\infty$. En este sentido solo es posible hablar de un H_{max} asociado a un número arbitrario de olas N , o de su distribución de probabilidad como variable aleatoria que es.

Esta distribución de probabilidades de H_{max} depende necesariamente del número de olas considerado, defasándose hacia mayores valores de H_{max} conforme N crece (ver fig. X.9). Se puede demostrar (Goda 1985), que para

dicha distribución el valor de H_{\max} con probabilidad de excedencia μ ($\mu \leq 1$) es

$$(H_{\max})_{\mu} = \sqrt{\ln \left[\frac{N}{\ln 1/(1-\mu)} \right]} H_{\text{rms}} \quad (\text{X-27})$$

con un valor promedio

$$(H_{\max})_{\text{media}} = \left[\sqrt{\ln N} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{\ln N}} \right] H_{\text{rms}} \quad (\text{X-28})$$

donde γ = constante de Euler ≈ 0.5772 , y un valor mas probable

$$(H_{\max})_{\text{moda}} = \sqrt{\ln N} H_{\text{rms}} \quad (\text{X-29})$$

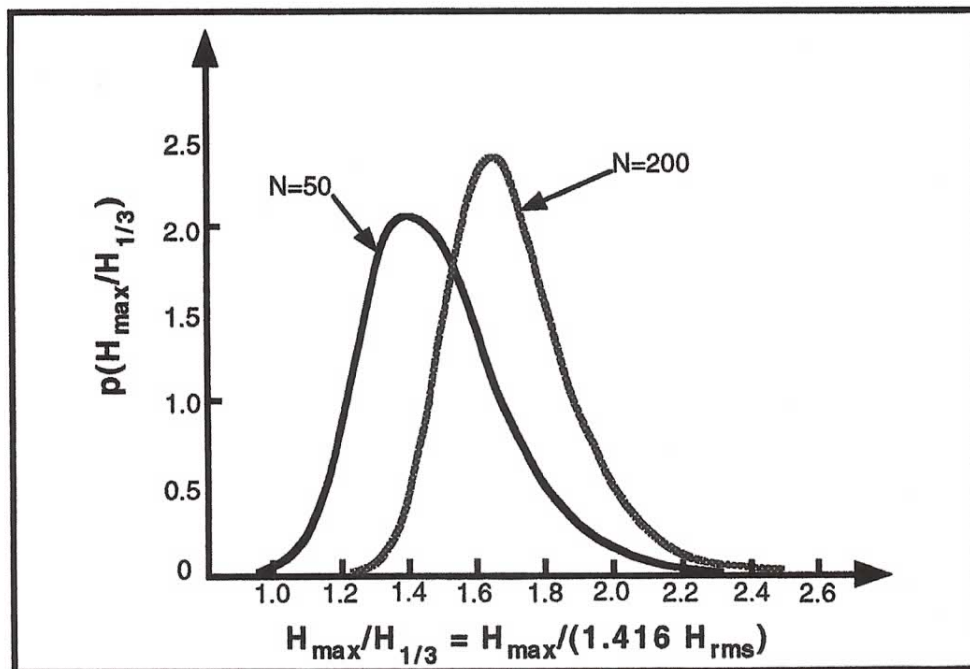


Fig. X.9. Distribución de probabilidad de la altura máxima de oleaje y su dependencia del número de olas consideradas (se muestran $N=50$ y 200). Observe que ambos casos se refieren a un estado de la superficie libre caracterizado por el mismo valor de $H_{1/3}$ o H_{rms} (fuente: Goda, 1985).