

Es importante enfatizar que debido a que H_{\max} depende de N (aún para un estado de oleaje dado definido por H_{rms}) en el diseño de obras marítimas, el número de olas factible para las condiciones de diseño debe ser considerado para obtener un valor H_{\max} de H_{rms} .

X.2.5 Distribución de probabilidad del período de oleaje

En general se observa que los períodos de oleaje irregular presentan una distribución de probabilidad mas concentrada que las alturas con un rango del dominio que va de $0.5 \bar{T}$ a $2\bar{T}$. No existen hoy en día una distribución teórica aceptada universalmente para describir esta variación. Sin embargo, empíricamente se observa que

$$T_{1/3} = (0.9 \text{ a } 1.4) \bar{T}$$

$$T_{1/10} = (0.9 \text{ a } 1.1) T_{1/3} = (0.8 \text{ a } 1.5) \bar{T} \quad (X-30)$$

$$T_{\max} = (0.6 \text{ a } 1.3) T_{1/3} = (0.5 \text{ a } 1.8) \bar{T}$$

Nótese que los 3 períodos representativos tienen valores medios similares

$$T_{1/3} = T_{1/10} = T_{\max} = (1.1 \text{ a } 1.3) \bar{T} \quad (X-31)$$

En general las olas de poca altura tienen períodos bajos mientras que las olas mayores a la altura media \bar{H} presentan poca correlación con el período. Una distribución conjunta de probabilidad de H y T se muestra en la fig. X.10.

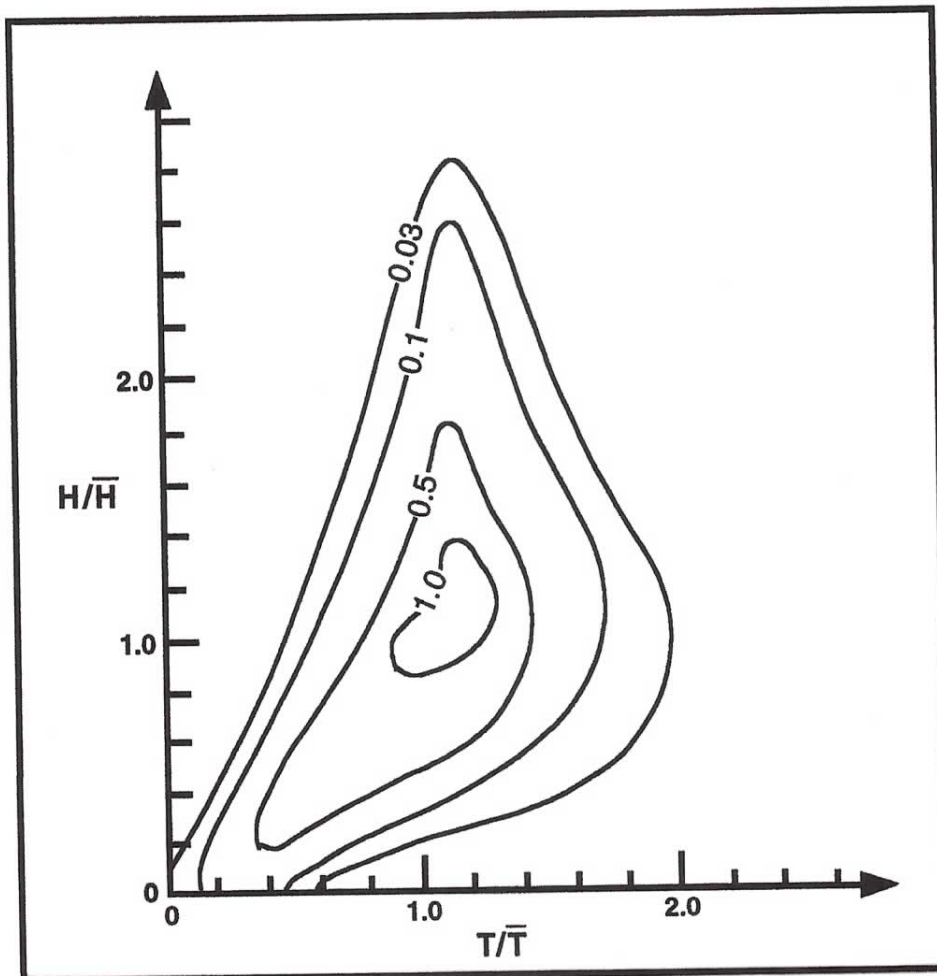


Fig. X.10. Distribución de probabilidad conjunta para altura y periodo. Obtenida empíricamente de 23 registros con un total de 2593 olas. Las isolíneas representan la superficie tridimensional de la función de densidad de probabilidad para cierta combinación de H y T (fuente: Goda, 1985).

En diseño de obras es común escoger una altura de ola de diseño y buscar las condiciones mas desfavorables en un rango de períodos factibles para esas olas y dominantes en la zona de interés.

X.3 DESCRIPCION DE OLAJE EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

X.3.1 La posición de la superficie libre como un proceso estocástico

La superficie libre real del mar se ajusta bien a la definición de un proceso estocástico en el sentido de que muchas variables independientes se combinan de tal manera que η varía en forma aleatoria; su valor para un cierto t o (x,y) no puede ser pronosticado en forma determinista, sino que cada valor tiene una cierta probabilidad de ocurrir. Este proceso estocástico se puede definir como el ensamble de un número infinito de registros de oleaje todos ellos correspondientes a un cierto *estado* de oleaje, pero cada uno de ellos siendo diferente a todos los demás.

$$\eta(t) = \left\{ \eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_j(t), \dots \right\} \quad (X-32)$$

Esto es lo que obtendríamos en la realidad, de poder mantener un estado de oleaje constante durante un tiempo infinito para poder tomar estos registros. También es similar al caso de tomar simultáneamente un número infinito de mediciones simultáneas en un área tal que presente un mismo estado de oleaje. Para un proceso estocástico general el *estado* que éste representa se obtiene haciendo estadísticas sobre el ensamble, es decir a través de las diferentes *realizaciones* $\eta_j(t)$ del ensamble. Por ejemplo, la distribución de probabilidad de η en un cierto instante t_0 es aquella obtenida del número infinito de valores $\eta_j(t)$, $j = 1, \dots, \infty$.

La herramienta que utilizaremos presupone que ciertas condiciones simplificadoras son aplicables al oleaje, mismas que son difíciles (o imposibles) de comprobar en la realidad y son aceptadas en la práctica solamente por la aplicabilidad demostrada de los resultados obtenidos. Estas condiciones son:

- a) **Estacionariedad:** Un proceso estocástico estacionario es aquel que mantiene sus características estadísticas constantes en el tiempo. Esto es razonable para intervalos de tiempo del orden de varios minutos. La analogía de la estacionariedad en el espacio es la homogeneidad del proceso.
- b) **Ergodicidad:** Un proceso estacionario ergódico es aquel cuyas estadísticas promedio en el tiempo (media, desviación standard, distribución de probabilidad, etc.) tomadas a lo largo de una sola de

las realizaciones cualquiera $\eta_j(t)$ son iguales a las estadísticas de ensamble a través de todas las realizaciones de $\eta(t)$. Esto es aceptado por la limitación física, en el campo, de medir un ensamble de registros bajo condiciones estacionarias. Todo proceso ergódico es estacionario, más no todo proceso estacionario es necesariamente ergódico.

c) **Proceso Gaussiano:** Esto se refiere a la característica de que la distribución de densidad de probabilidad de que la superficie libre se encuentre en un instante dado cualquiera entre $z = \eta$ y $z = \eta + d\eta$ es una distribución normal o Gaussiana.

Otra suposición necesaria es que el proceso estocástico tiene un nivel medio igual a cero, pero esto es fácilmente obtenido al restar el nivel medio del registro obtenido, previo análisis de éste.

El suponer estas características nos permite caracterizar un cierto estado de oleaje a través de un solo registro y su análisis a través de su descomposición en componentes frecuenciales sinusoidales.

X.3.2 El espectro de oleaje.

El espectro de oleaje representa la distribución de energía (o de amplitud) de un cierto estado del oleaje en el dominio de las frecuencias. Se obtiene de un cierto registro a través de un análisis de Fourier. Es también posible (y útil) pensar en ocasiones en el espectro de oleaje en el dominio de los números de onda k (o frecuencias espaciales).

Un espectro de oleaje completo, es decir el resultado del análisis de Fourier de un cierto registro de oleaje en el tiempo, tiene dos componentes, el espectro de amplitud (o alternativamente el de energía puesto que esta es proporcional al cuadrado de la amplitud) y el espectro de las fases. En otras palabras, la descripción completa de un cierto estado de la superficie del agua en el dominio de las frecuencias consta tanto de las amplitudes como de las fases de cada una de las componentes sinusoidales independientes que se supone producen superpuestas dicho estado. Sin embargo, en la práctica, en el análisis de oleaje en campo se

esta generalmente interesado solamente en el espectro de amplitudes o de energía y no en el espectro de las fases, puesto que en general estas fases son aleatorias. Sin embargo el espectro de fases tiene utilidad en el control de calidad de experimentos en laboratorio con oleaje espectral.

Podemos pensar en diferentes tipos de espectro:

- Si el registro que tenemos es continuo e infinito una transformada de Fourier produce un espectro continuo. Por razones prácticas obvias este espectro no se utiliza en la realidad y es solamente una herramienta teórica. En el caso de un espectro continuo el área bajo la curva entre ω y $\omega + d\omega$ representa la densidad de amplitud (proporcional a la raíz cuadrada de la energía de oleaje) en ese intervalo.
- Si el registro es continuo pero finito, su expansión en serie de Fourier produce un espectro de amplitud (y otro de fase) discreto, es decir un *peine* de componentes a frecuencias discretas igualmente espaciadas cuyas ordenadas representan su amplitud (energía^{1/2}). Hoy en día el análisis continuo (o analógico) de señales es cada vez menos común.
- Si el registro es discreto (valores de η en tiempos discretos igualmente espaciados) una transformada discreta de Fourier (DFT) produce un espectro de amplitudes (y otro de fases) discreto con las amplitudes de cada componente representadas por su ordenada.
- En cualquier caso de los anteriores si el eje de las ordenadas es proporcional a la amplitud se trata de un espectro de amplitudes pero si se grafica con una ordenada proporcional al cuadrado de la amplitud se trata de un espectro de energía (o de potencia como a veces se le denomina). Algunos métodos de análisis de Fourier muy usados antes del advenimiento de la transformada rápida de Fourier (FFT), producen este espectro de potencia directamente (ver fig. X-11).

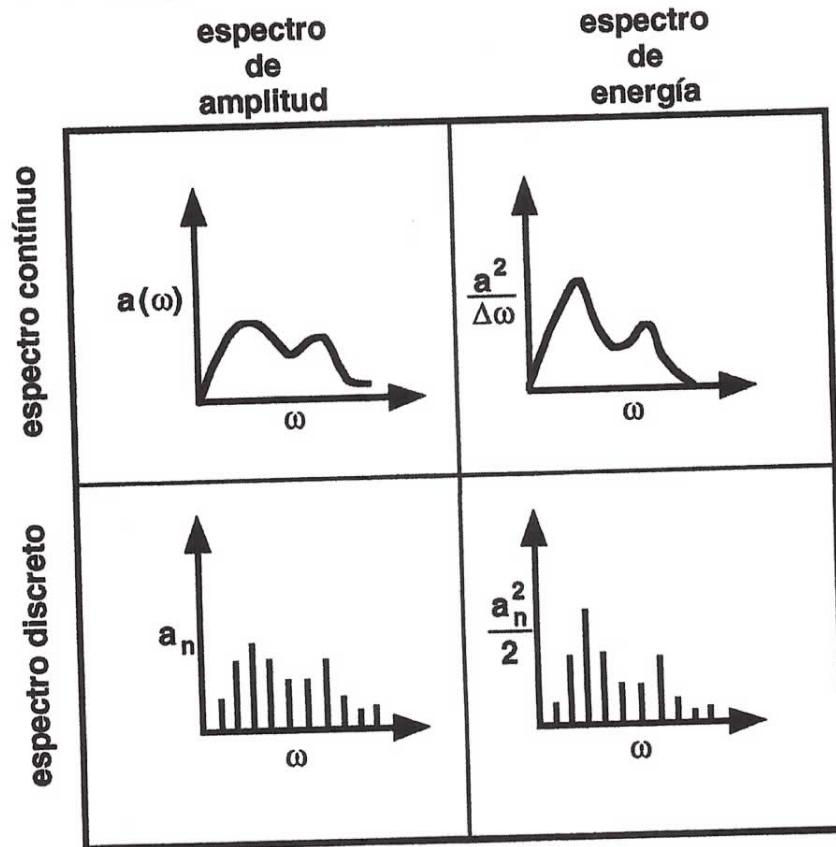


Fig. X.11. Contraste entre espectros de amplitud y de energía, para el caso continuo y para el caso discreto (fuente: Dean y Dalrymple, 1984).

Obviamente cada tipo de espectro tiene un equivalente en los otros. Para pasar de un espectro continuo a uno discreto se discretiza en bandas de igual $\Delta\omega$ y se grafica como un *peine* donde la ordenada es igual al área de la banda correspondiente, como se esquematiza en la fig. X-12.

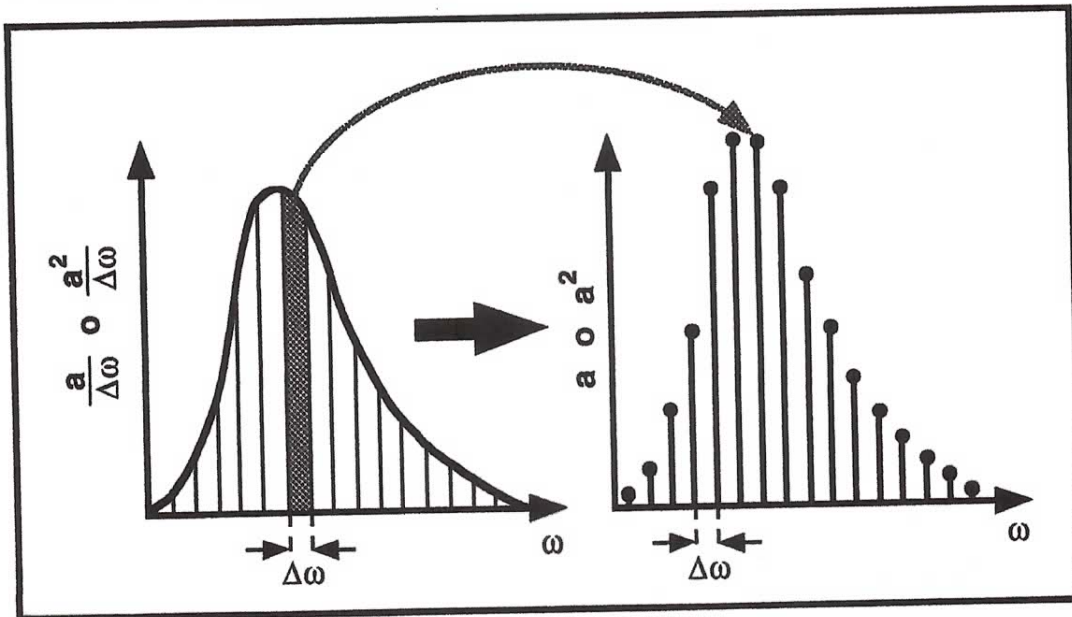


Fig. X.12. Conversi3n de un espectro cont3nuo a un espectro discreto.

Para pasar de un espectro discreto a uno cont3nuo se convierte a un diagrama de barras (similar a un histograma) donde la ordenada de cada componente discreta es el 1rea de la barra y luego se suaviza, tal y como se indica esquem1ticamente en la figura X-13.

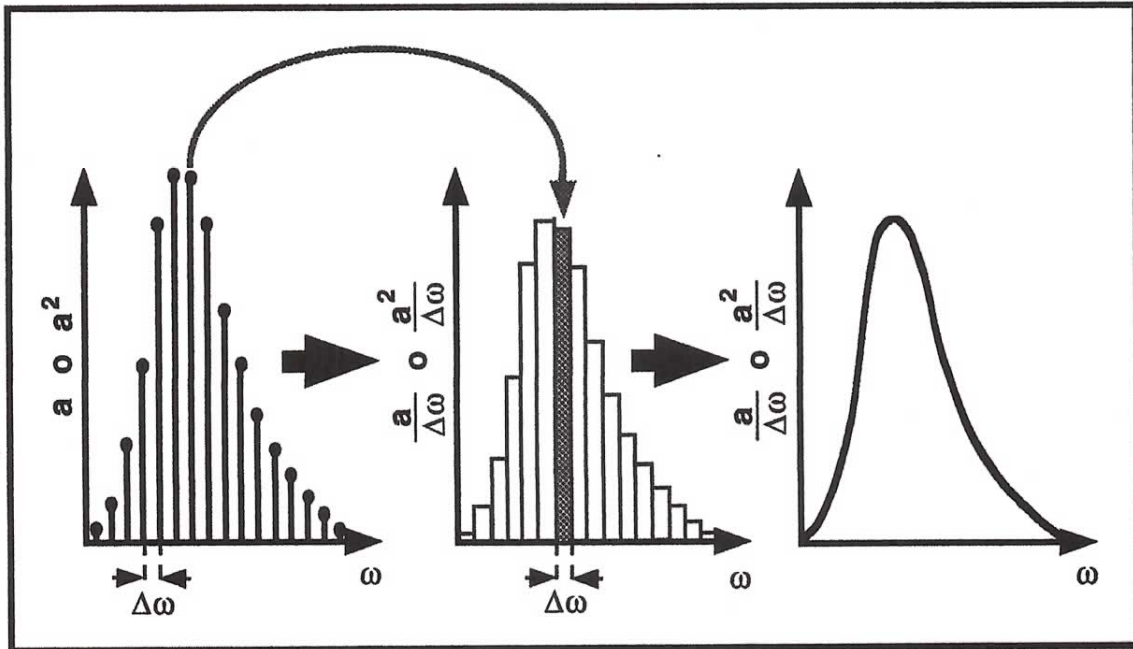


Fig. X.13. Conversión de un espectro discreto a uno espectro continuo.

Un registro en forma continua siempre se puede discretizar y analizar con DFT. Sin embargo el hacer continuo a un registro discreto a través de interpolación no incrementa la cantidad o calidad de información disponible y de hecho, dependiendo del método de interpolación, puede introducir información espuria.

La herramienta para registros finitos (series de Fourier y DFT) presupone implícitamente que el registro analizado se repite indefinida y periódicamente antes y después del tramo analizado. Esto, obviamente, no representa adecuadamente a la realidad, pero si se tiene cuidado de recortar el registro de tal manera que la η inicial y la η final sean iguales, esta suposición implícita no acarrea ninguna consecuencia práctica. Este proceso se ilustra en la fig. X-14.

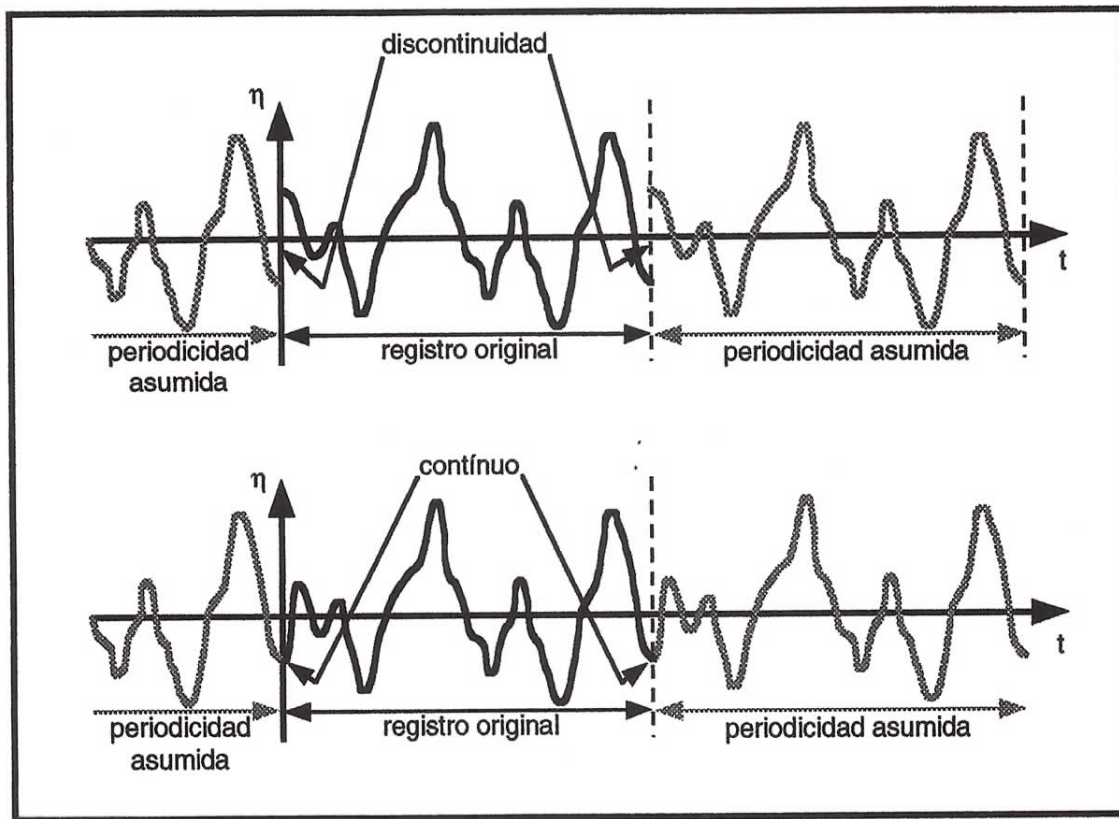


Fig. X.14. Periodicidad de un registro asumida por la herramienta DFT (o FFT). En el registro superior la correcta reconstrucción de la discontinuidad requiere frecuencias infinitamente altas. En cambio, en el registro inferior dicho problema no existe.

La herramienta matemática disponible para análisis de Fourier, en ocasiones maneja espectros con frecuencias tanto positivas como negativas. La energía disponible en el lado negativo representa en realidad energía a las frecuencias positivas correspondientes puesto que las frecuencias negativas carecen de un significado físico. Es por esto que en la práctica es más conveniente manejar espectros de *un solo lado*, o sea con la energía solo en el eje de las frecuencias positivas. Se muestran ambos casos contrastados en la fig. X-15.

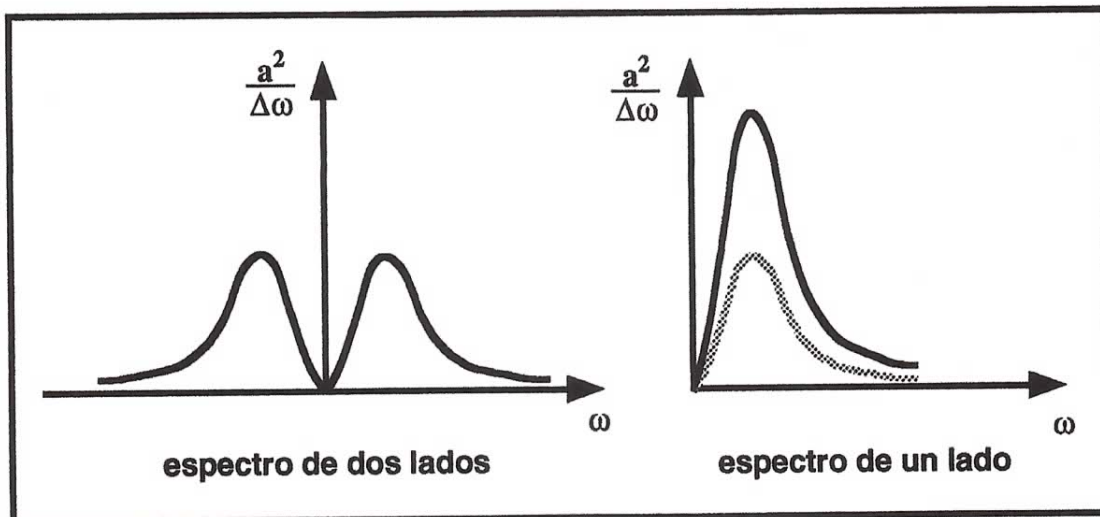


Fig. X.15. Contraste entre el espectro de dos lados (asumido por la herramienta matemática) y su equivalente espectro de un lado (usado en la práctica).

X.3.3 Obtención de espectros por FFT

Hoy en día, con el uso generalizado de las computadoras digitales, la forma más común de medición y análisis de registros de oleaje (o cualquier otra señal) es con el procesamiento de la señal digital (o sea, operando sobre valores de η a intervalos regulares de tiempo). Así pues, la forma más común de obtener el espectro de oleaje es a través de la transformada digital de Fourier (DFT). Este análisis es análogo a la expansión en series de Fourier de un registro continuo pero para la información discreta. Se recomienda al lector interesado consultar estos antecedentes en textos de matemáticas, así como en Dean y Darlrymple (1975), y Stearns (1975).

Teniendo un $\eta(t)$ continuo del tipo que se esquematiza en la fig. X-16, se obtienen los valores cada Δt , $\eta(m\Delta t) = \eta_m$, $m=1..M$ en M puntos a intervalos Δt , con el tiempo de muestreo total siendo igual a $M\Delta t$. Con este proceso de *muestreo* se obtiene un registro discreto equivalente como el que se esquematiza en la fig. X-17.

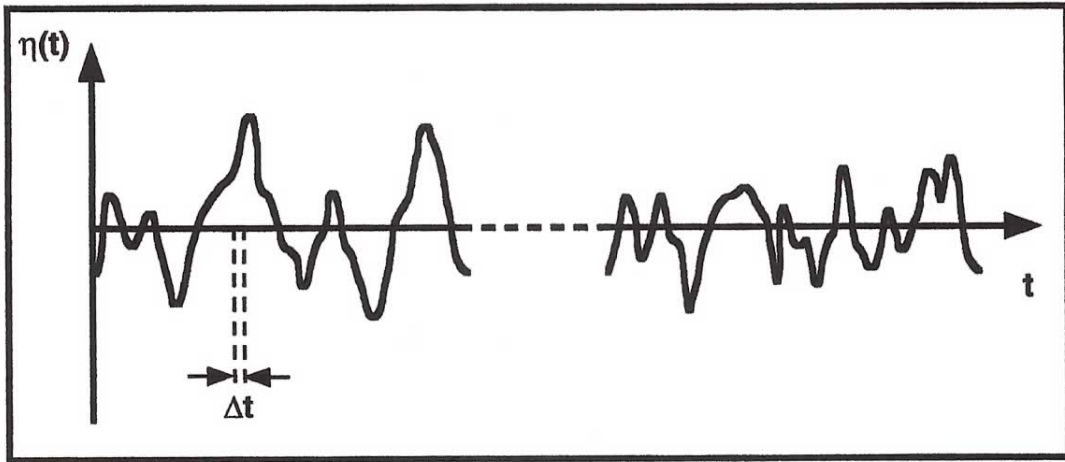


Fig. X.16. Registro continuo de oleaje muestreado cada Δt (ver Fig. X.17).

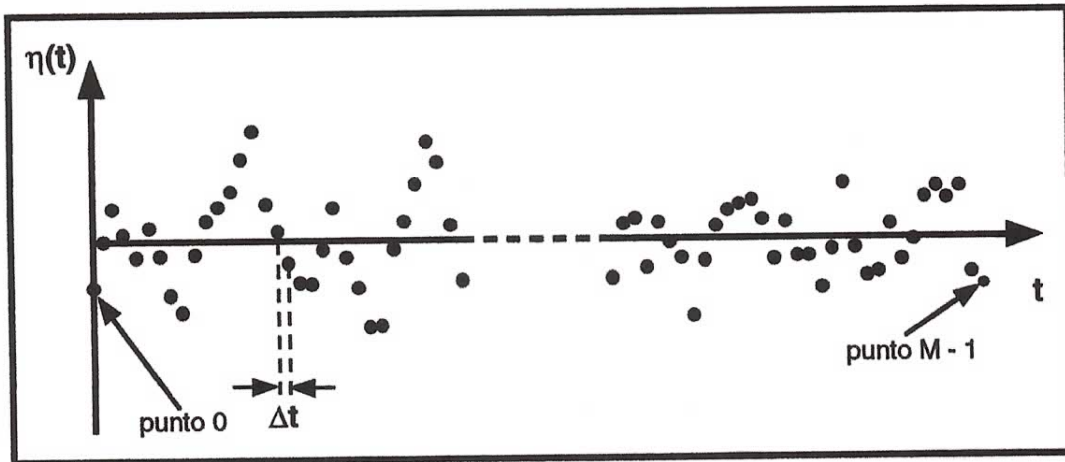


Fig. X.17. Registro discreto obtenido al muestrear cada Δt el registro continuo de la Fig. X.16.

Las componentes frecuenciales que componen el registro muestreado son

$$\alpha_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad l = 0, 1, 2, \dots, M/2 \quad (X-33)$$

(donde suponemos que M es par), con α_1 representando la amplitud de la

l'ésima componente, ω_1 su frecuencia (en radianes) igual a

$$\omega_1 = 1 \Delta\omega \quad (\text{X-34})$$

y ϕ_1 su fase. El incremento de frecuencia entre componentes esta dado por

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{M\Delta t} \quad (\text{X-35})$$

Con esta nomenclatura, el registro se puede reconstruir superponiendo todas las componentes

$$\eta(t) = \sum_{l=1}^{M/2} \alpha_l \cos(\omega_l t + \phi_l) \quad (\text{X-36})$$

con las amplitudes α_l y fases ϕ_l obteniendose a través del análisis de Fourier como:

$$\alpha_l = |a_l + i b_l| = \sqrt{a_l^2 + b_l^2} \quad (\text{X-37})$$

$$\phi_l = \arctan \frac{b_l}{a_l} \quad (\text{X-38})$$

donde a_l y b_l son las partes real e imaginaria de la componente l

$$a_l = \frac{K_l}{M} \operatorname{Real} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \eta_m e^{-i(2\pi lm/M)} \right\} \quad (\text{X-39})$$

$$b_l = \frac{K_l}{M} \operatorname{Imag} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \eta_m e^{-i(2\pi lm/M)} \right\} \quad (\text{X-40})$$

Las expresiones entre llaves { } representan la DFT (ver Stearns,1975). La constante K_l adquiere uno de dos posibles valores dependiendo del término del que se trate

$$K_1 = \begin{cases} 2 & l = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1 \\ 1 & l = 0 \text{ y } l = \frac{M}{2} \end{cases} \quad (X-41)$$

hecho que proviene del *doblamiento* del espectro de *dos lados* para obtener un espectro *de un solo lado* (ver final de la secc. X.3.2).

La DFT requiere de un gran trabajo computacional, proporcional al cuadrado del número de puntos, M^2 . O sea, el procesar un registro de 1024 puntos requiere 4 veces el tiempo de cómputo que el procesar 512 puntos.

La transformada rápida de Fourier (FFT), propuesta en 1965 por Cooley y Tukey, es un algoritmo muy eficiente para calcular la DFT pues aprovecha el hecho de que muchos de los cálculos son repetidos. Este algoritmo requiere un trabajo proporcional a $M \log_2 M$, o sea procesar un registro de 1024 puntos requiere solo 2.2 veces el tiempo de cómputo de un registro de 512 puntos. La única restricción que produce la FFT (al menos en la mayoría de sus implementaciones) es que el número M debe ser una potencia entera de 2, o sea estamos restringidos a muestrear únicamente 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, puntos del registro.

El uso de este algoritmo está tan generalizado que hoy en día inclusive los aparatos analizadores de espectro lo hacen digitalmente a través de microprocesadores dedicados, pudiendo alcanzarse en muchos casos un cálculo del espectro en tiempo real.

El resultado matemático de este análisis de Fourier de la señal se puede interpretar gráficamente en el dominio de las frecuencias con un diagrama *de peine* para la amplitud y la fase, tal y como se esquematizan en la fig. X-18. La altura de cada una de las *cerdas* del peine corresponde a la amplitud o fase de la componente correspondiente y como en todos los diagramas nos indican la distribución de amplitudes y fases entre las diferentes frecuencias.

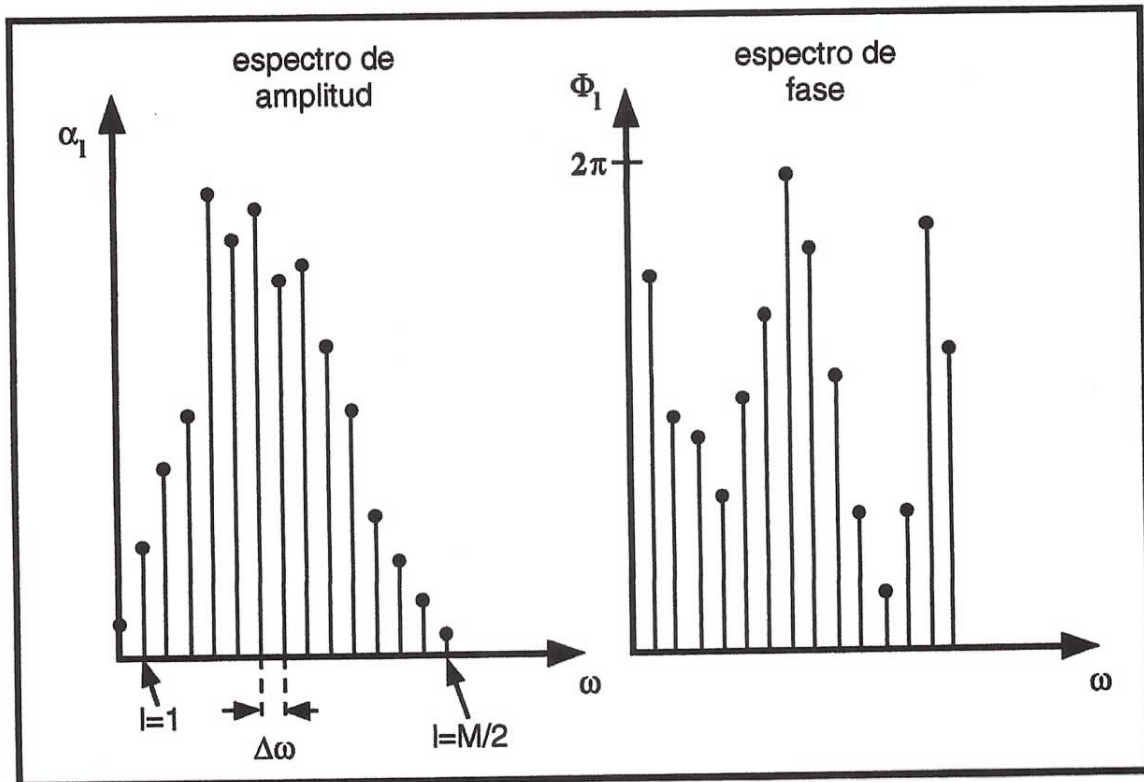


Fig. X.18. Resultado de la transformada discreta de Fourier (a través del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier): un espectro discreto de amplitud y un espectro discreto de fase.

El muestreo y procesamiento de señales digitales tiene restricciones y particularidades especiales sobre las que no comentaremos aquí haciendo referencia a textos especializados sobre el tema (se recomienda Stearns, 1975). Sin embargo puntualizaremos que la aplicación ciega de las expresiones presentadas puede llevar a resultados erróneos si no se respetan dichas restricciones.

X.3.4 Obtención de espectros a través de la función de autocorrelación.

Antes de la invención del algoritmo FFT, el espectro de energía de oleaje se calculaba a través de obtener primero la función de autocorrelación y luego haciendo su transformada de Fourier.

Una medida de la correlación entre 2 registros o señales cualesquiera (aleatorios o determinísticos), $f(t)$ y $g(t)$, es la función de covariancia definida como

$$C_{fg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) g(t+\tau) dt \quad (X-42)$$

o sea el valor promedio del producto de las dos funciones (o registros) defasados en un tiempo τ .

Cuando $g = f$, la función de covariancia se convierte en una medida de la correlación de una función, con su valor τ mas tarde y es llamada función de autocorrelación.

$$C_{ff}(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) f(t+\tau) dt \quad (X-43)$$

que siempre es simétrica alrededor de $\tau = 0$ y tiene su máximo precisamente en $\tau = 0$ (puesto que una función esta perfectamente correlacionada consigo misma, sin defasamiento τ). Para funciones random, como es de esperarse, la correlación tiende a cero conforme τ aumenta, esto es para una función random la forma del $C_{ff}(\tau)$ es como se indica en la fig. X.19.