

Fig. X.19. Función de autocorrelación

La función de autocorrelación no lleva consigo ninguna información de fase, solo de amplitud; esto puede comprobarse al aplicar la expresión a $f(t+\alpha)$ en lugar de $f(t)$ y obtener iguales resultados.

Se puede demostrar que la transformada de Fourier de $C_{ff}(\tau)$ corresponde a un espectro de energía, llamado comunmente espectro de potencia, nombre que proviene de su utilización inicial en señales eléctricas.

$$\frac{\alpha^2(\omega)}{d\omega} = S_{ff}(\omega) = 2 \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} C_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \quad (X-44)$$

donde $S_{ff}(\omega)$ define el espectro de energía de un solo lado (y por ello es necesario el factor 2 fuera de los corchetes).

Las características de la función de autocorrelación hacían posible obtener el espectro (usualmente en forma analógica) en forma relativamente económica. Hoy en día este método ha caído en desuso, sin embargo la función de autocorrelación es útil en la descripción matemática y comprensión del fenómeno. La razón de presentar este breve comentario es para orientar a aquellos que lean alguno de los fascinantes textos antiguos que se refieren al procesamiento digital de señales.

X.3.5 Espectros estándar.

Del estudio de registros y observación de oleaje en el mar, varios investigadores han propuesto espectros de oleaje estándar que especifican la distribución de energía de oleaje sobre las frecuencias. Estos son similares a las distribuciones de probabilidad estándar (como normal, t-sudent, Rayleigh, etc) en que solo establecen la forma funcional dejando libre el valor de parámetros que permiten ajustarlas a las condiciones actuales de oleaje en una cierta localización y tiempo. Estos parámetros se fijan usualmente a través de datos meteorológicos o estimación de olas monocromáticas representativas de muestras finitas (o registros) del oleaje.

En 1952, Newmann propone

$$S_{\eta\eta}(\omega) = C \frac{\pi}{2} \omega^{-6} e^{-2(g/\omega U)^2} \quad (X-45)$$

para condiciones del océano totalmente desarrollado para un viento (a altura de anemómetro) de velocidad U , con C siendo un parámetro para el que se ha obtenido de mediciones un valor

$$C \approx 3.05 \text{ m}^2/\text{seg}^5 \quad (X-46)$$

En 1964, Pierson y Moskowitz proponen

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} e^{-\beta(\omega_0/\omega)^4} \quad (X-47)$$

$$\text{con } \alpha = .0081, \quad \beta = 0.74 \quad \text{y} \quad \omega_0 = g/U_{19.5} \quad (X-48)$$

donde $U_{19.5}$ es la velocidad del viento a una altura de 19.5 m sobre el nivel medio de la superficie (igual a 1.05 U_{10} para distribución de velocidad de viento logarítmica). Este espectro también fue propuesto para un mar completamente desarrollado.

Bretschneider en 1968 propone

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{2.7}{16} H_s^2 \frac{\bar{\omega}^{-4}}{\omega^5} e^{-0.675 \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^4} \quad (X-49)$$

con H_s siendo la altura significativa de ola y $\bar{\omega}$ es la frecuencia media

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} \cong \frac{2\pi}{T_s} \quad (X-50)$$

pudiendo estimarse H_s y T_s (o \bar{T}) de mediciones experimentales. Obsérvese que esta propuesta no se encuentra relacionada explícitamente con la velocidad del viento, sino que se ajusta a los parámetros significativos medidos y por lo tanto no presupone un mar completamente desarrollado.

En 1970, Mitsuyasu propone ajustes al espectro anterior resultando en

$$S_{\eta\eta}(\omega) = 0.257 H_s^2 T_s \left(\frac{2\pi}{\omega} T_s \right)^{-5} e^{-1.03 \left(\frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{T_s} \right)^4} \quad (X-51)$$

En 1973, Hasselman propone un espectro con mayor concentración de energía en la banda del pico

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \alpha H_s T_p^{-4} \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^{-5} e^{-1.25 \left(\frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{T_p} \right)^4} \gamma \exp \left[- \left(\frac{2\pi T_p}{\omega} - 1 \right)^2 / 2\sigma^2 \right] \quad (X-52)$$

con

$$\alpha \cong \frac{0.0624}{0.230 + 0.0336 \gamma - 0.185 / (1.9 + \gamma)} \quad (X-53)$$

$$\sigma \cong \begin{cases} 0.07 & \omega \leq \omega_p \\ 0.09 & \omega \geq \omega_p \end{cases} \quad (X-54)$$

$$\tau = 1 \text{ hasta } 7 \text{ (media de 3.3)} \quad (X-55)$$

donde el subíndice p se refiere al pico del espectro. El factor γ controla la concentración de energía en el pico; con $\gamma=1$ el espectro coincide con

el de Bretschneider-Mitsuyasu; para $\gamma=3.3$ el pico es 2.2 veces mas alto que en el espectro de Bretschneider-Mitsuyasu para igual ola significativa. El espectro anterior se conoce como espectro JONSWAP y hoy en día es posiblemente el más utilizado. Dada la complejidad de la expresión, se hace necesario el señalar que la expresión $\exp()$ al final efectivamente corresponde al exponente (no es un factor).

X.3.6 Momentos del espectro y conexión con estadísticas.

El momento i del espectro está definido por

$$\mu_i = \int_0^{\infty} \omega^i S_{\eta\eta}(\omega) d\omega \quad (X-56)$$

Con esta definición y considerando que $S_{\eta\eta}(\omega)d\omega$ representa la cantidad

$$\frac{2E}{\rho g} = \text{amplitud al cuadrado} \quad (X-57)$$

de una componente frecuencial centrada en ω , se tiene que el momento de orden cero es

$$\mu_0 = \int_0^{\infty} S_{\eta\eta}(\omega) d\omega = \frac{2E}{\rho g} \quad (X-58)$$

o sea proporcional a la energía total del estado de oleaje representado por el espectro $S_{\eta\eta}(\omega)$. Se puede demostrar que

$$\eta_{\text{rms}}^2 = \overline{\eta^2} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \eta^2 dt = \sqrt{\mu_0} \quad (X-59)$$

o sea que μ_0 representa la variancia de la superficie libre del agua.

Del espectro también se obtiene facilmente la frecuencia del pico ω_p que ha demostrado tener una buena correlación con el período signficante.

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} \approx \frac{2\pi}{1.05 T_s} \quad (X-60)$$

También se puede demostrar (ver Goda (1985) secc. 9.3) que el período medio (por el método de cruces del nivel cero hacia arriba) es igual a

$$\bar{T} = 2\pi \sqrt{\mu_0 / \mu_2} \quad (X-61)$$

De similar manera es común expresar parámetros característicos del oleaje como $H_{1/10}$, $H_{1/3}$, etc. en función de los momentos del espectro. Se refiere al lector a textos mas especializados para hallar dichas relaciones.

X.4 EL ESPECTRO DIRECCIONAL DE OLAJE.

En realidad en el mar, la superficie libre no solo esta compuesta de diferentes componentes frecuenciales sino que además provienen de diferentes direcciones. Esto se debe a que, aún en condiciones idealizadas de generación de oleaje en un área de viento constante y uniforme, las olas no solo son generadas en la dirección del viento, sino en un rango de direcciones alrededor de él, como se esquematiza en la fig. X.20.

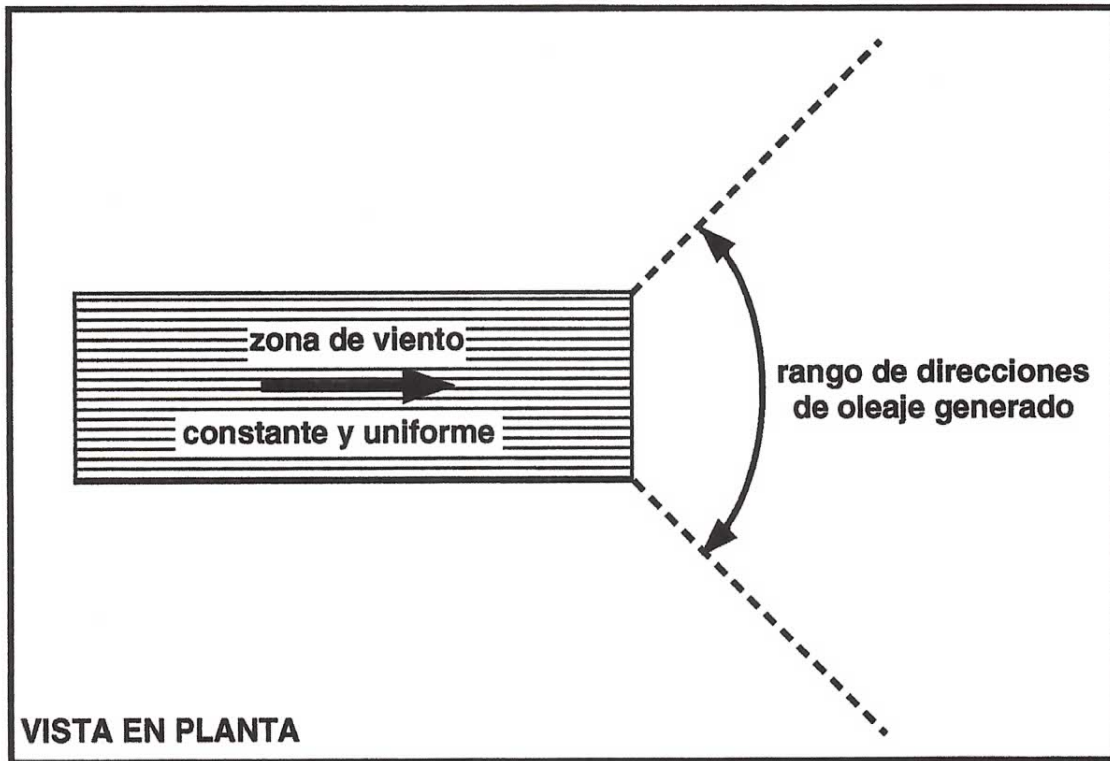


Fig. X.20. Zona de generación de oleaje por viento idealizada con rango de direcciones de oleaje que emergen de ella.

En este sentido, el espectro de energía debe representar en forma más realista la distribución de energía de oleaje tanto en las frecuencias como en las direcciones, por lo que se requiere de una dependencia del tipo

$$S(\omega, \theta) \tag{X-62}$$

Es usual separar la distribución de energía en las frecuencias de aquella en las direcciones, expresando

$$S(\omega, \theta) = S(\omega) G(\theta; \omega) \tag{X-63}$$

donde $G(\theta; \omega)$ es la función de distribución direccional cuyo valor depende de θ y deja abierta la posibilidad de una dependencia de ω como un parámetro; o sea, la distribución direccional puede ser diferente para

cada frecuencia ω . Por definición

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(\theta; \omega) d\theta = 1 \quad (X-64)$$

En este caso, la energía total del oleaje está representada por el volumen bajo la superficie $S(\omega, \theta)$, o sea, es necesario el integrar con respecto a ω y a θ . De la misma manera, la energía entre las frecuencias ω_1 y $\omega_1 + \Delta\omega$ moviéndose en el rango de direcciones entre θ_1 y $\theta_1 + \Delta\theta$ está dada por

$$\int_{\omega=\omega_1}^{\omega=\omega_1 + \Delta\omega} \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_1 + \Delta\theta} S(\omega, \theta) d\theta d\omega \quad (X-65)$$

Obviamente también se puede pensar en extensiones de este tipo para los espectros discretos y para los espectros de amplitud.

La medición experimental de espectros direccionales en el campo es un problema muy interesante y aún de actualidad en la investigación presente, dedicándose libros completos al tema (ver Wiegel, 1982 y ASCE, 1974). Nosotros dejaremos este tema para un texto mas avanzado. Basta decir que las mediciones tienen que hacerse con algún método que permita identificar direcciones de donde proviene el oleaje y puede hacerse a través de arreglos bidimensionales de medidores de η , de medidores de η acoplados con medidores de velocidad en dos direcciones ortogonales, boyas con acelerógrafos en dos direcciones ortogonales, etc. Por la complicación inherente en estas mediciones y su alto costo, aún hoy en día, son muy escasas y apenas nos permiten vislumbrar las características direccionales del mar real.

Es común limitar la función direccional al rango de ángulos 90° alrededor de la dirección principal, pues es intuitivo que el oleaje no será generado en dirección opuesta al viento. Sin embargo un espectro medido donde se sobreponen olas generadas en dos tormentas separadas podría tener alguna componente en direcciones mas allá de los $\pm 90^\circ$.

X.4.1 Visualización del espectro direccional en dominios (ω, θ) y (k, θ)

Se puede visualizar un espectro direccional como una superficie en un dominio bidimensional de coordenadas cartesianas con un eje ω , otro θ y el tercero (el vertical) S , como se indica en la fig. X.21. De la misma forma que en el caso de oleaje espectral sin considerar dirección, dicha gráfica representa la distribución de *densidad de energía* (o amplitud al cuadrado) sobre diversas frecuencias y direcciones de propoagación. Obsérvese que en este caso se ha utilizado la convención de *espectro de un solo lado* (en las frecuencias).

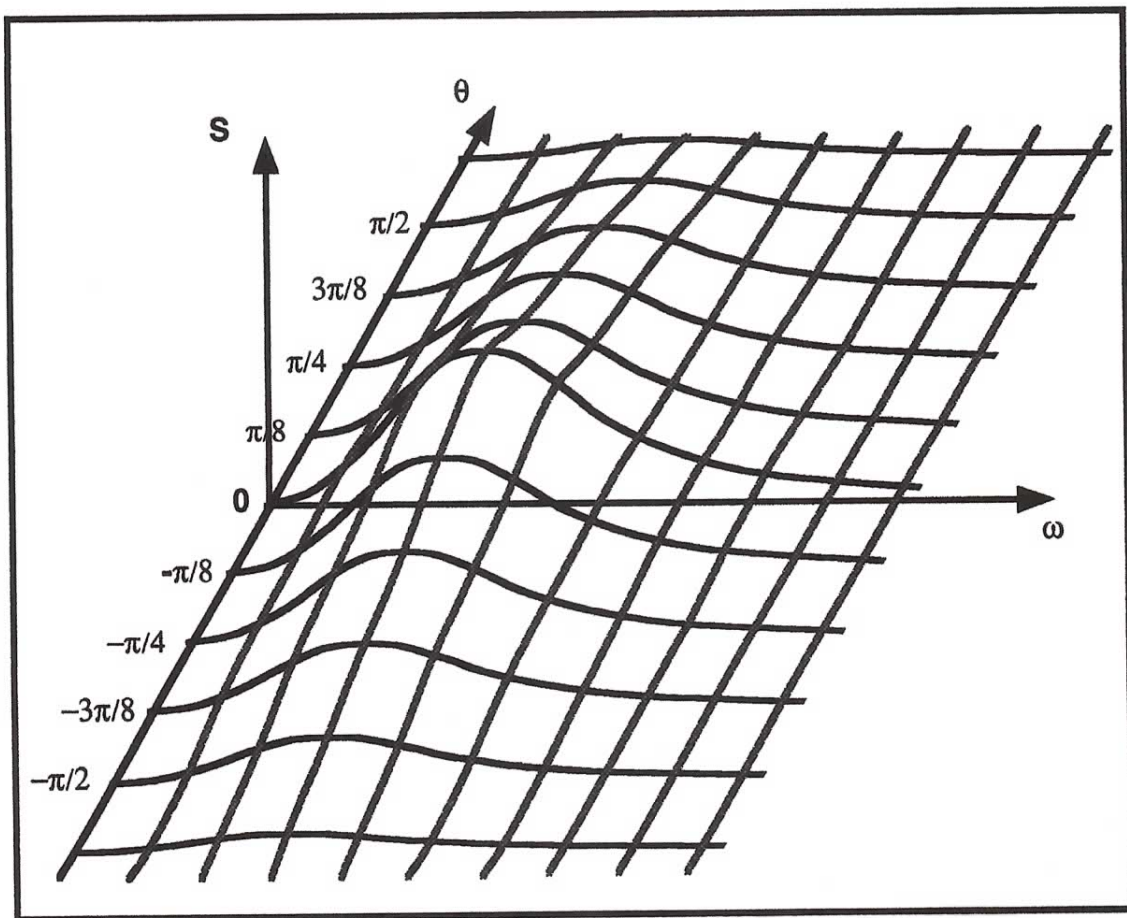


Fig. X.21. Diagrama de un espectro direccional, $S(\omega, \theta)$, en coordenadas cartesianas.

Un corte transversal para $\theta = \theta_1 = \text{const.}$ representaría la distribución de energía en las frecuencias en dicha dirección θ_1 , mientras que una

rebanada para $\omega = \omega_1 = \text{const.}$ representaría la distribución direccional de la energía disponible a la frecuencia ω_1 .

Puede ser más intuitivo pensar en el espectro direccional en coordenadas cilíndricas con la coordenada angular θ , la coordenada radial ω y la coordenada vertical S , como se esquematiza en la fig. X.22. La interpretación es análoga a la anterior.

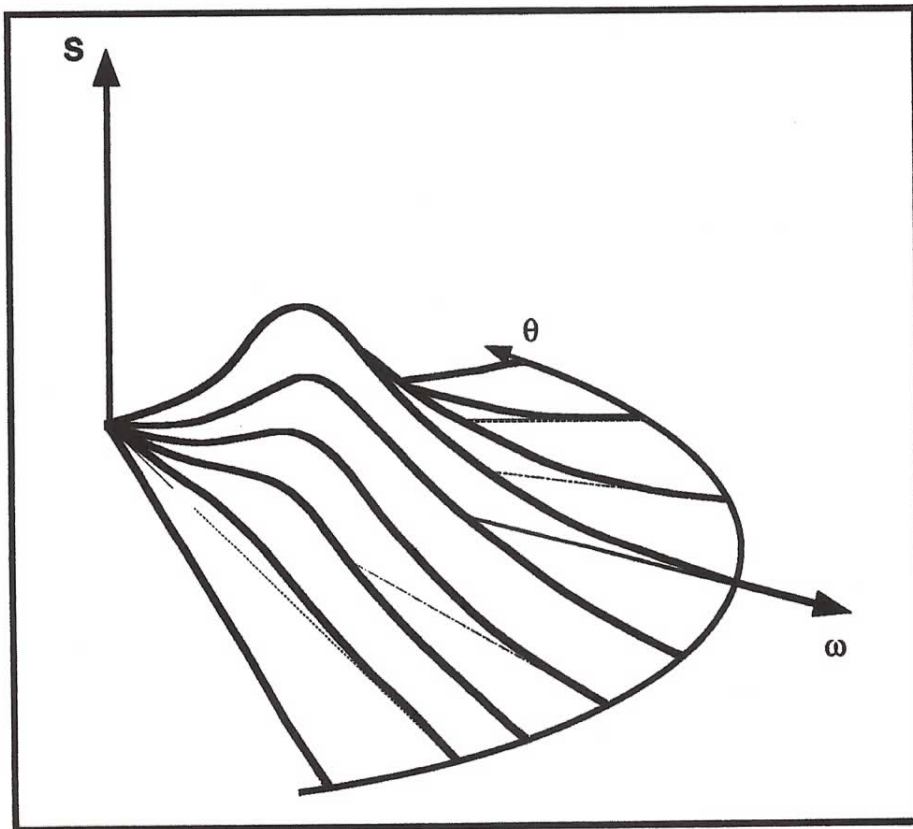


Fig. X.22. Diagrama de un espectro direccional, $S(\omega, \theta)$, en coordenadas cilíndricas.

Puede ser aún más fácil interpretar el espectro direccional en el dominio $k-\theta$ donde k (el número de onda) tiene una relación biunívoca con ω basado en la relación de dispersión lineal. Puede visualizarse en forma similar al espectro en las frecuencias, $S(\omega, \theta)$, tanto en coordenadas ortogonales como cilíndricas. Esta forma es especialmente útil pues el vector

$$\vec{k} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y = |k| \cos \theta \hat{e}_x + |k| \sin \theta \hat{e}_y \quad (X-66)$$

define la dirección de propagación de la ola, mientras que ω no tiene direccionalidad.

X.4.2 Distribuciones direccionales standard.

Diferentes investigaciones han propuesto expresiones para $G(\theta, \omega)$. Los criterios más simples establecen una distribución única para todas las frecuencias, siendo la más común de ellas:

$$G(\theta; \omega) = G(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & |\theta| \geq \pi/2 \end{cases} \quad (X-67)$$

Otra de ellas es

$$G(\theta; \omega) = G(\theta) = \begin{cases} \frac{2\ell(2\ell-2)\dots(4)(2)}{\pi(2\ell-1)(2\ell-3)\dots(3)(1)} \cos^{2\ell} \theta & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & |\theta| \geq \pi/2 \end{cases} \quad (X-68)$$

donde ℓ es un parámetro que define que tan concentrada es la distribución alrededor de la dirección principal (más sobre ℓ adelante).

Los criterios más sofisticados establecen una distribución direccional que cambia de frecuencia a frecuencia. El criterio del proyecto SWOP (*Stereo Wave Observation Project* cuya traducción al español es Proyecto de Observación Estereográfica de Oleaje) es:

$$G(\theta; \omega) = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + (0.5 + 0.82 e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\omega_0})^4}) \cos 2\theta + 0.32 e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\omega_0})^4} \cos 4\theta \right\} \quad |\theta| \leq \pi/2 \quad (X-69)$$

donde ω_0 es un parámetro asociado al viento generador

$$\omega_0 = g/U_{5.0} \quad (X-70)$$

donde $U_{5.0}$ = velocidad del viento a 5m sobre el nivel medio del mar.

Esta función direccional presenta una distribución mas uniforme para las frecuencias altas contra una mayor concentración para las frecuencias bajas. Esto es, las olas largas permanecen mejor alineadas con la dirección local del viento, mientras las mas cortas se dispersan en un *abanico* más amplia.

La función de distribución direccional propuesta por Mitsuyasu es:

$$G(\theta; \omega) = G_o \cos^{2s} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (X-71)$$

donde G_o es una constante de normalización que se define como

$$G_o = \frac{1}{\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^{2s} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta} \quad (X-72)$$

y s es un parámetro, función de ω , que indico el grado de concentración alrededor de la dirección principal.

Cuando

$$\theta_{\min} = -\pi \quad \text{y} \quad \theta_{\max} = \pi$$

la constante toma el valor

$$G_o = \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2 (s+1)}{\Gamma (2s+1)} \quad (X-73)$$

Esta distribución implica una alta concentración para la frecuencia pico, $\omega = \omega_p$, del espectro ($s = s_{\max}$) y mayor uniformidad al alejarse de dicha frecuencia pico:

$$s = \begin{cases} s_{\max} (\omega/\omega_p)^5 & \omega \leq \omega_p \\ s_{\max} (\omega/\omega_p)^{-2.5} & \omega \geq \omega_p \end{cases} \quad (X-74)$$

donde ω_p se puede estimar de $T_{1/3}$ con

$$\omega_p = \frac{1/2\pi}{1.05 T_{1/3}} \quad (X-75)$$

como se observa en la fig. X.23.

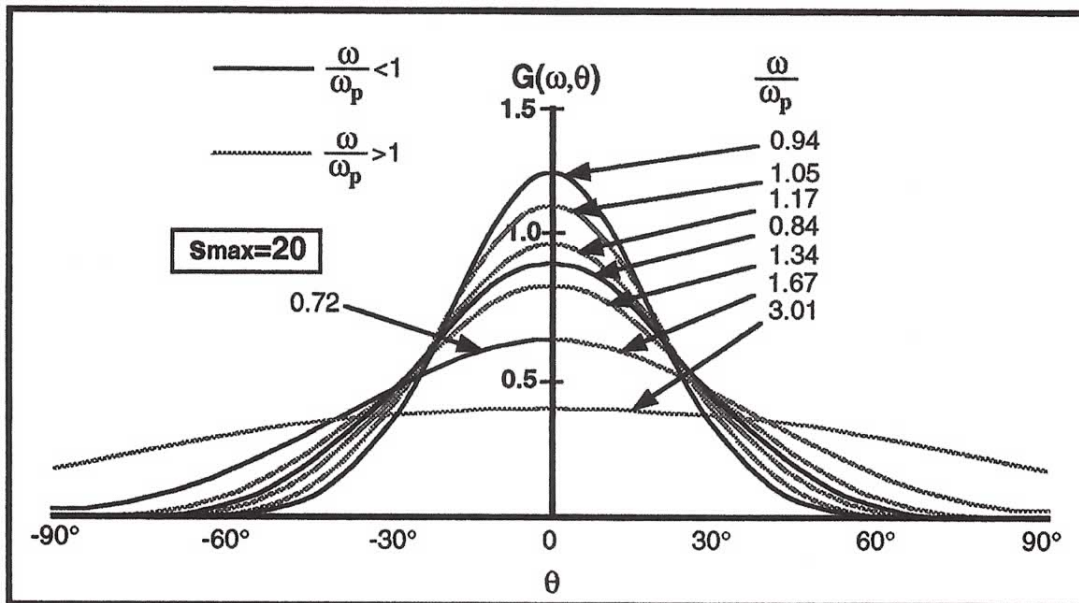


Fig. X.23. Función de distribución direccional de Mitsuyasu para $s_{\max}=20$.
Fuente: Goda (1985).

El parámetro s_{\max} está relacionado con el viento generador a través de

$$s_{\max} = 11.5 (\omega U/g)^{-2.5} \quad (X-76)$$

aunque otros investigadores han propuesto otras expresiones para s_{\max} .

La relación aproximada entre s_{\max} y el parámetro l visto anteriormente es

$$l \approx 0.11 s_{\max} \quad \text{para } l \geq 2 \quad (X-77)$$

Los valores aproximados de s_{\max} son, para diferentes casos:

olas en la zona de generación	$s_{\max} \approx 10$	(X-78)
olas recién salidas de zona de generación	$s_{\max} \approx 25$	
olas lejos de la zona de generación	$s_{\max} \approx 75$	

X.5. DISEÑO DE OBRAS CONSIDERANDO OLEAJE ALEATORIO.

Los criterios y espectros tratados en las secciones anteriores corresponden a oleaje en aguas profundas. Si se desea diseñar una obra tomando en cuenta el espectro de ola, es necesario *transitar* este a través de agua intermedias y someras para obtener el espectro incidente sobre la estructura a diseñar. Los principales efectos a considerar en esta transformación del espectro son:

- refracción y cambio de profundidad.
- atenuación por fricción en el fondo
- pérdidas de energía por rompientes
- difracción
- reflexión

De estos, los fenómenos gobernados por ecuaciones lineales (difracción, y reflexión) pueden aplicarse a cada una de las componentes en forma independiente para obtener el espectro transformado. Para los fenómenos no lineales (atenuación, refracción, disipación en rompientes) usualmente se busca linealizar estos efectos a través de variables representativas del espectro como un todo. Por ejemplo la disipación en capa límite turbulenta es proporcional a U_b^3 , y podría pensarse en una linealización haciéndola proporcional a $U_b U_{b,rms}^2$ donde $U_{b,rms}$ representa al espectro. Nótese que al atenuarse las componentes en diferente forma, el espectro se deforma y con esto cambia $U_{b,rms}$. Esto implica que el cálculo no debe hacerse en un solo paso desde aguas profundas hasta la estructura, sino en pequeños pasos recalculando el espectro al final de cada uno de ellos.

En forma experimental, el espectro de olas puede simularse como se indicó en el capítulo IV.

Es muy importante puntualizar el hecho que no es lo mismo transformar a una ola monocromática representativa del espectro y reconstruir el espectro de ella, que transformar el espectro como un todo. En principio la primera forma es conceptualmente incorrecta. Este proceso conceptualmente erróneo se esquematiza en la fig. X.24.

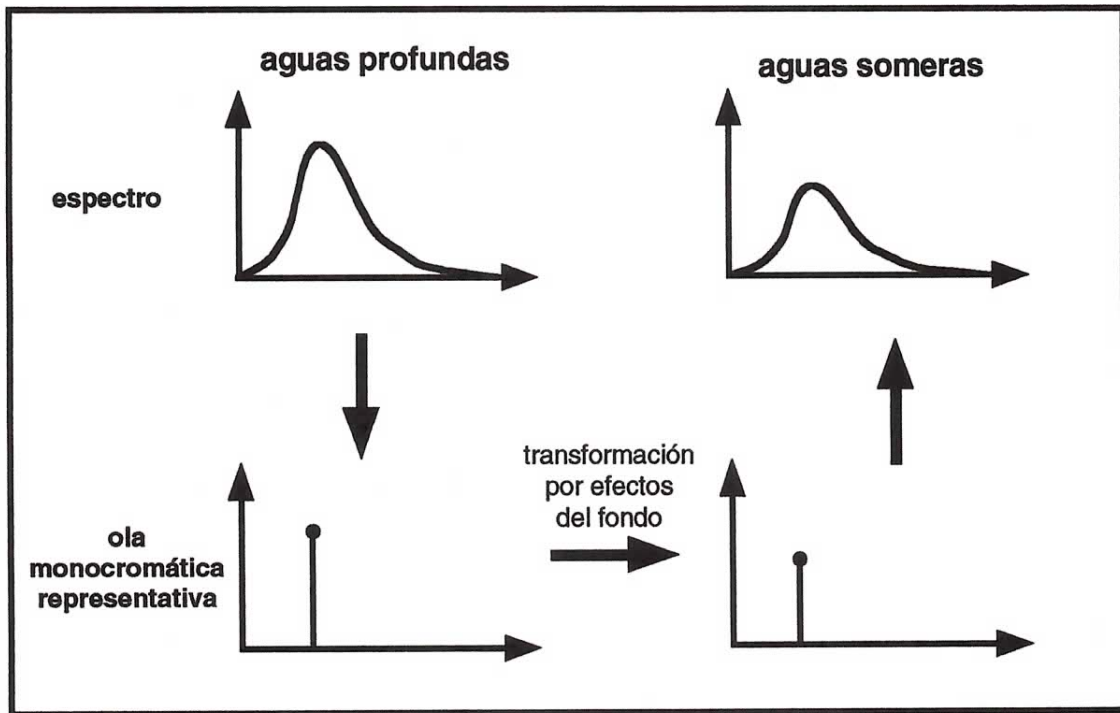


Fig. X.24. Método conceptualmente erróneo de transitar un espectro de oleaje de aguas profundas a aguas someras.

En contraste, el procedimiento correcto es el de considerar al espectro como un todo. Si el diseño requiere de una ola monocromática representativa (como la ola significativa), lo correcto es obtenerla a partir del espectro transformado. Esto se esquematiza en la fig. X.25.

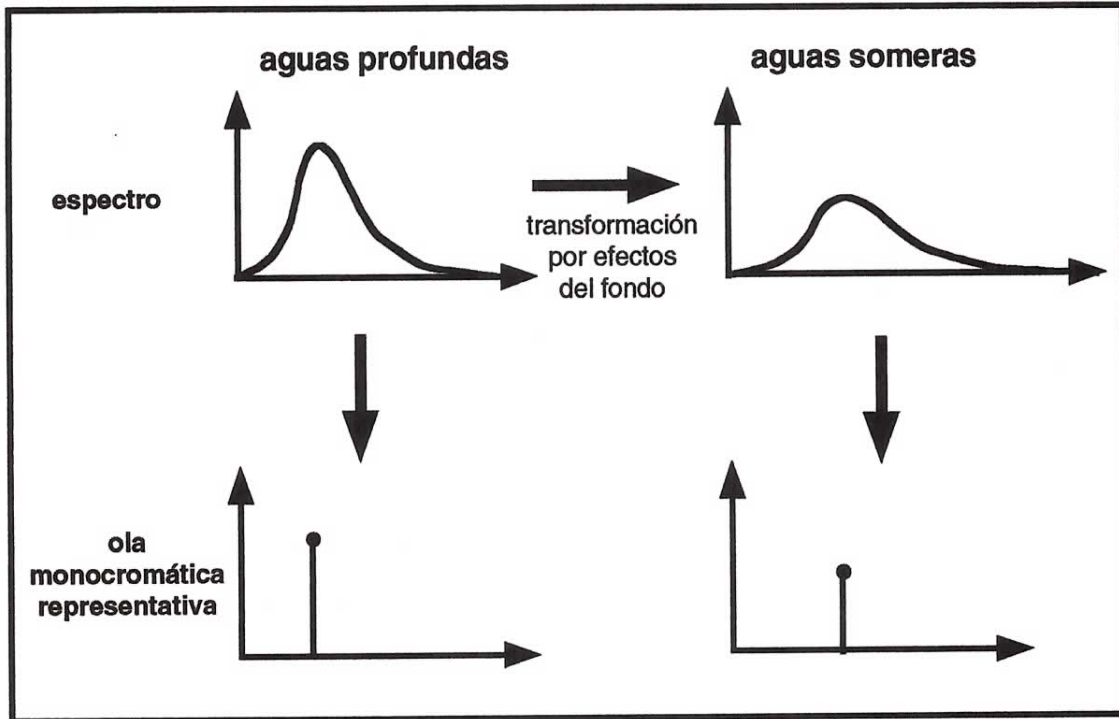


Fig. X.25. Método conceptualmente correcto de transitar un espectro de oleaje de aguas profundas a aguas someras.

La aseveración anterior se demuestra, en forma heurística, con el hecho de que una onda monocromática al transformarse en aguas intermedias o someras, o por interacción con estructuras, no cambia su frecuencia mientras que el espectro al transformarse sus componentes de manera desigual sí cambia la frecuencia de su ola monocromática representativa.

Desgraciadamente el concepto de ola monocromática representativa (especialmente la significativa) esta muy arraigado en la comunidad ingenieril y es muchas veces utilizado erroneamente.

En la actualidad esta aumentando la tendencia a tomar en cuenta la irregularidad y aleatoriedad del mar en el diseño de obras marítimas así como en estudios de procesos litorales.