XI. ELEMENTOS DE TEORIAS NO LINEALES DE OLEAJE

En el capítulo III se hicieron consideraciones física que permitieron linealizar las ecuaciones gobernantes y así obtener una solución analítica aproximada (de 1er orden) el problema. Sin embargo para mejorar esta solución aproximada (a un 2^{o} orden o mayor) es necesario usar un mecanismo que en forma consistente y sistemática establezca la magnitud relativa de cada término en las ecuaciones gobernantes de tal manera que se pueda atacar el problema en forma analítica en forma progresiva corrigiendo la solución de 1er orden con aportaciones de orden superior. La utilidad mas obvia de estos términos de orden superior es la de evaluar en forma cuantitativa el error cometido en la solución lineal y establecer rangos de aplicabilidad basados en esto. Hoy en día se utilizan teorías de orden superior en la solución de muchos problemas de ingeniería marítima y costera.

XI.1 ESQUEMA GENERAL DE PERTURBACIONES.

El método de perturbaciones es un método analítico para obtener soluciones a ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) diferenciales en derivadas parciales en una forma progesivamente mas aproximada a la solución exacta. En esta sección, sin tratar el método como una herramienta en general, mostraremos su aplicación el problema de las ecuaciones gobernantes de oleaje desarrolladas en el capítulo II.

En forma general el método consiste en:

a) Escoger los parámetros "ordenadores"

Estos parámetros son combinaciones adimensionales de las variables, cuya magnitud introduce la no linealidad en el problema, es decir aquellos que al ser considerados pequeños (o despreciables) linealizan el problema.

b) Normalizar las variables para expresar el problema en términos de variables adimensionales de orden 1 (en nuestra nomenclatura $\mathcal{O}(1)$).

Esto permite que todos los términos y sus derivadas en las ecuaciones gobernantes sean de orden 1, y que sus coeficientes indiquen la importancia relativa de cada término.

c) Substituir las variables físicas por sus equivalentes en términos de las variables normalizadas en las ecuaciones gobernantes.

d) Introducir en las ecuaciones gobernantes normalizadas la consideración de los parámetros ordenadores como cantidades pequeñas.

Estas consideraciones deben ser las adecuadas para las condiciones en las que la solución será utilizada.

e) Proponer la existencia de soluciones en forma de una serie infinita de potencias de el parámetro ordenador sugerido por las ecuaciones obtenidas en (d).

A partir de este momento se puede trabajar nuevamente con las ecuaciones físicas (no normalizadas).

f) Substituir las series de potencias en las ecuaciones gobernantes y dividir el problema en sus diferentes "ordenes de magnitud".

Estos ordenes de magnitud estan dados por la potencia del parámetro ordenador por la que cada término esta multiplicado.

g) Solucionar el problema a 1^{er} orden (problema lineal).

h) Utilizando la solución lineal, resolver el problema a 2^{o} orden; con esta solución conocida, resolver a 3^{er} orden; . . .

Si la solución propuesta en (e) es la adecuada los pasos en (h) consistirán en problemas lineales, que aún cuando impliquen algebra sumamente complicada tienen solución analítica.

Se invita al lector a que, conforme se avanze en el presente capítulo, regrese a verificar que en efecto el método descrito se esta siguiendo "mecanicamente". Sin embargo, es necesario recordar que algunos de los pasos requieren de criterio y experiencia, por lo que usar adecuadamente el método tiene a la vez algo de "arte".

La superposición de las soluciones obtenidas para un orden creciente serán progesivamente mejores aproximaciones a la solución "exacta" acercándose a ella asimptoticamente. El procedimiento se sigue con la esperanza (puesto que en casos prácticos es difícil demostrarlo) de que la serie sea convergente a la solución exacta. En la práctica, rara vez es necesario (o conveniente) llegar mas alla de las primeras ordenes de magnitud.

La explicación previa es sin duda muy abstracta y a continuación ejemplificaremos su aplicación a las ecuaciones gobernantes de oleaje. Para minimizar el espacio requerido usaremos la nomenclatura donde la derivación parcial con respecto a una variable se indicara con un subíndice igual a dicha variable, por ejemplo, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ se expresa como ϕ_x.

Las ecuaciones gobernantes para olas planas (uniformes en y) son

$$\nabla^2\phi = \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \qquad \text{(en el fluído)} \qquad \text{(XI-1)}$$

$$\phi_z = 0 \qquad \text{en } z = -h \qquad \text{(frontera en el fondo)} \qquad \text{(XI-2)}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_t + \phi_x\,\eta_x - \phi_z &= 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + g\eta &= 0 \end{aligned}\right\} \text{en } z = \eta \text{ (superficie libre)} \qquad \text{(XI-3)}$$

Además se tiene las condiciones de periodicidad temporal y espacial, así como la ecuación de Bermoulli en el fluído (desacoplada del resto).

De las tres escalas longitudinales en el problema L,h y a, se identifican los parámetros ordenadores.

$$\varepsilon = \frac{a}{h} \qquad \beta = \frac{a}{L} \qquad \text{(XI-4)}$$

puesto que la suposición de su pequeña magnitud nos permitió linealizar las ecuaciones. En este caso es mas convenientes utilizar la combinación equivalente.

$$\varepsilon = \frac{a}{h} \qquad\qquad \mu = \frac{h}{L} \tag{XI-5}$$

con ε representado la no linealidad introducida por una amplitud finita y μ la introducida por la profundidad relativa.

Las escalas (u órdenes de magnitud) de las variables x, z y η son L, h y a respectivamente, de tal manera que las variables adimensionales.

$$x' = \frac{x}{L} \qquad\qquad z' = \frac{z}{h} \qquad\qquad \eta' = \frac{\eta}{a} \tag{XI-6}$$

son de orden de magnitud 1.

De la solución lineal (para aguas someras)

$$C = \sqrt{gh} \tag{XI-7}$$

y la escala del tiempo es aquel lapso que toma a una cresta avanzar la distancia L, por lo que el tiempo adimencional

$$t' = t/\left(\frac{L}{\sqrt{gh}}\right) \tag{XI-8}$$

De la teoría lineal en aguas someras tenemos que

$$u = \phi_x = \frac{a}{h}\sqrt{gh} \qquad \text{(uniforme en z)} \tag{XI-9}$$

de tal manera que la escala del potencial de velocidades es igual a la escala de ϕ_x por la escala de x, o sea

$$\frac{a}{h}\sqrt{gh}\ L = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{h}} L = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\ \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{h}} L$$

$$= \frac{agL}{\sqrt{gh}} \tag{XI-10}$$

por lo que el potencial adimensional es

$$\phi' = \phi \Big/ \frac{agL}{\sqrt{gh}} \tag{XI-11}$$

Para aguas profundas se puede hacer una normalización similar, pero por razones que veremos mas adelante las teorías no lineales son mas necesarias conforme la profundidad relativa se hace menor, por lo que consideraremos aquí solo la normalización para aguas someras. Esta normalización nos asegura que todas las variables "primas" son de orden de magnitud 1.

Substituyendo a x,z,η,t y ϕ en las ecuaciones gobernantes por sus equivalentes normalizadas (Lx', hz', $a\eta'$, etc.) se obtienen

$$\phi_{zz} + \mu^2 \phi_{xx} = 0 \tag{XI-12*}$$

$$\phi_z = 0 \qquad \text{en} \quad z = -1 \tag{XI-13*}$$

$$\varepsilon\eta_t + \varepsilon^2 \phi_x\eta_x = \frac{\varepsilon}{\mu^2}\phi_z \qquad \text{en} \quad z = \varepsilon\eta \tag{XI-14*}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left(\varepsilon\phi_x^2 + \frac{\varepsilon}{\mu^2}\phi_z^2\right) + \eta = 0 \qquad \text{en } z = \varepsilon\eta \tag{XI-15*}$$

donde los asteriscos a la derecha del número de la ecuación indican que todas las variables en la ecuación son las variables en la misma son las variables normalizadas (las primas se omiten por brevedad). Nótese que para una cierta combinación de a, h y L (ó de ε y μ) las magnitudes relativas de cada término están ahora dadas por sus coeficientes en términos de ε y μ.

Ahora es necesario postular una solución en una serie de potencias, cuya forma depende de los valores relativos de a, h y L (o ε y μ). Aquí examinaremos tres casos.

a) Olas debilmente no lineales (teoría de Stokes)
b) Olas largas de amplitud finita (teroía de Airy)
c) Olas relativamente largas debilmente no lineales (teoría Cnoidal)

XI.2 TEORIA DE OLEAJE DE STOKES.

Buscando afinar la teoría de oleaje lineal para aguas intermedias suponemos

$$\mu = \frac{h}{L} = O(1) \qquad \varepsilon = \frac{a}{h} \cong \frac{a}{L} << 1 \qquad \text{(XI-16)}$$

las ecuaciones gobernantes normalizadas quedan

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \qquad \text{(XI-17*)}$$

$$\phi_z = 0 \qquad \text{en} \quad z = -1 \qquad \text{(XI-18*)}$$

$$\eta_t + \varepsilon\, \phi_x\, \eta_x - \phi_z = 0 \qquad \text{en } z = \varepsilon\eta \qquad \text{(XI-19*)}$$

$$\phi_t + \eta + \frac{\varepsilon}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) = 0 \qquad \text{en } z = \varepsilon\eta \qquad \text{(XI-20*)}$$

que se obtienen simplemente substituyendo a μ por 1 y diviendo cuando es posible toda la ecuación entre ε. Nótese que los términos no multiplicados por ε son aquellos que se consideraron para la teoría lineal (ver capítulo III).

Puesto que los términos aparecen multiplicados por potencias sucesivas de ε, se propone la solución

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n\, \phi^{(n)} \qquad \text{(XI-21*)}$$

donde el superíndice entre paréntesis indica el orden en la serie (no un exponente) y la magnitud relativa de cada término esta dada por su coeficiente ε^n. Obviamente para $\varepsilon<<1$ la importancia es decreciente conforme $n \to \infty$.

En este momento podemos regresar a las ecuaciones físicas (no normalizadas) del problema y proponer soluciones del tipo.

$$\phi = \varepsilon\, \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3\, \phi^{(3)} + \ldots \qquad \text{(XI-22)}$$

$$\eta = \varepsilon\, \eta^{(1)} + \varepsilon^2\, \eta^{(2)} + \varepsilon^3\, \eta^{(3)} + \ldots \qquad \text{(XI-23)}$$

$$p_+ = \varepsilon p_x^{(1)} + \varepsilon^2\, p_x^{(2)} + \varepsilon^3\, p_x^{(3)} + \ldots \qquad \text{(XI-24)}$$

donde ahora ε no requiere tener un significado físico explícito (como a/h), sino solamente ser un parámetro ordenador pequeño. Podría considerarse como implícito en las $\phi^{(n)}$, $\eta^{(n)}$ y $p_+^{(n)}$ en cuyo caso su interpretación sería por ejemplo

$$\varepsilon = \frac{|\eta^{(2)}|}{|\eta^{(1)}|} \qquad \text{(XI-25)}$$

o sea la magnitud relativa de un término de la serie con respecto al anterior. Sin embargo es conveniente mantener su forma explícita en la serie pues facilita la comprensión del orden de magnitud de un término, por ejemplo el término.

$$(\varepsilon\, \phi^{(1)})\ (\varepsilon^2 \eta^{(2)})$$

es de tercer orden puesto que el coeficiente ε esta a la 3^a potencia.

$$\varepsilon^3\, \phi^{(1)}\, \eta^{(2)}$$

Como se verá mas adelante, no será necesaria su evaluación explícita y se considera unicamente como un parámetro de *"contabilidad"*.

Además de las series de potencias propuestas es necesario permitir la posibilidad de que la longitud de onda (para una frecuencia dada) dependa de la magnitud relativa de la amplitud (o en forma equivalente que la celeridad de onda dependa de la altura de la onda). Esta consideración es necesaria para obtener soluciones que representan adecuadamente el comportamiento físico observado. Esto se puede lograr proponiendo.

$$k = k^{(0)} + \varepsilon k^{(1)} + \varepsilon^2 k^{(2)} + \ldots \qquad \text{(XI-26)}$$

Es ahora necesario introducir estas expansiones en las ecuaciones gobernantes. En la ecuación de Laplace

$$\left[\phi\right]_{xx} + \left[\phi\right]_{zz} = \left[\varepsilon\phi^{(1)} + \varepsilon^2\phi^{(2)} + \ldots\right]_{xx} + \left[\varepsilon\phi^{(1)} + \varepsilon^2\phi^{(2)} + \ldots\right]_{zz} =$$

$$\left\{\varepsilon\phi^{(1)}_{xx} + \varepsilon^2\phi^{(2)}_{xx} + \ldots\right\} + \left\{\varepsilon\ \phi^{(1)}_{zz} + \varepsilon^2\phi^{(2)}_{zz} + \ldots\right\} = 0 \qquad \text{(XI-27)}$$

Reuniendo términos del mismo orden se tiene

$$\varepsilon\left\{\phi^{(1)}_{xx} + \phi^{(1)}_{zz}\right\} + \varepsilon^2\left\{\phi^{(2)}_{xx} + \phi^{(2)}_{zz}\right\} + \ldots = 0$$

No es sorpresivo que las ecuaciones a cada orden (los términos entre llaves) sean semejantes entre sí y con respecto a la ecuación original puesto que la ecuación de Laplace es lineal por lo que la única corrección necesaria a la solución de 1^{er} orden es aquella requerida por la no linealidad introducida por las condiciones de frontera.

De manera similar, la condición de frontera de fondo queda

$$\phi_z = \varepsilon\ \phi^{(1)}_z + \varepsilon^2\phi^{(2)}_z + \ldots = 0 \qquad \text{en } z = -h \qquad \text{(XI-28)}$$

Las condiciones de frontera de la superficie son no lineales en cuanto a su localización y requieren de un tratamiento especial, que consiste en expander cada uno de sus términos en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$ (recuerde que $\varepsilon = a/h << 1$) y después substituir las series de potencias en esta expansión. Obviamente esto genera productos de series infinitas por lo que solo ejemplificaremos con un solo término y dejaremos al lector la tarea de comprobar los resultados que se establecen siguiendo este método. Como ejemplo tomaremos el 3^{er} término de la condición cinemática en la superficie

$$(\phi_z)_{z=\eta}$$

Expandiendo alrededor de $z = 0$

$$(\phi_z)_{z=\eta} = (\phi_z)_{z=0} + \eta\left(\left[\phi_z\right]_z\right)_{z=0} + \eta^2\left(\left[\left[\phi_z\right]_z\right]_z\right)_{z=0} \qquad \text{(XI-29)}$$

donde los paréntesis rectangulares agrupan términos que se *derivan* con respecto a z y los paréntesis redondeados agrupan términos que se *evalúan* en z = 0. En forma mas concisa

$$(\phi_z)_{z=\eta} = (\phi_z)_{z=0} + \eta(\phi_{zz})_{z=0} + \eta^2(\phi_{zzz})_{z=0} + \ . \ . \ . \qquad \text{(XI-30)}$$

Substituyendo a "ϕ" y a "η" por sus respectivas series en potencias de ε

$$\begin{aligned}(\phi_z)_{z=\eta} &= \left(\varepsilon\ \phi_z^{(1)} + \varepsilon^2\ \phi_z^{(2)} + \ldots\right)_{z=0} \\ &\left(\varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + \ldots\right)\left(\varepsilon\phi_{zz}^{(1)} + \varepsilon^2\phi_{zz}^{(2)} + \ldots\right) + \ldots\end{aligned} \qquad \text{(XI-31)}$$

Multiplicando y reuniendo términos de igual potencia de ε

$$\begin{aligned}(\phi_z)_{z=\eta} &= \varepsilon\ (\phi_z^{(1)})_{z=0} + \varepsilon^2(\phi_z^{(2)} + \eta^{(1)}\phi_{zz}^{(1)})_{z=0} + \ \ldots \\ &= \varepsilon\ (\phi_z^{(1)})_{z=0} + \varepsilon^2(\phi_z^{(2)} + \eta^{(1)}\phi_{zz}^{(1)})_{z=0} + \ \mathcal{O}(\varepsilon^3)\end{aligned} \qquad \text{(XI-32)}$$

donde el último término solo indica que el resto de los términos no especificados explicitamente es de orden ε^3 o mayor.

Realizando una similar labor sobre cada término, la condición cinemática de superficie queda

$$\varepsilon\left(\eta_t^{(1)} - \phi_z^{(1)}\right) + \varepsilon^2\left(\eta_t^{(2)} - \phi_z^{(2)} + \phi_x^{(1)}\ \eta_x^{(1)} - \eta_x^{(1)}\ \phi_{zz}^{(1)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0$$

$$\text{en} \quad z = 0 \qquad \text{(XI-33)}$$

y la condición dinámica de superficie queda

$$\begin{aligned}&\varepsilon\ \left(\phi_t^{(1)} + g\eta^{(1)}\right) + \varepsilon^2\left(\phi_t^{(2)} + g\eta^{(2)} + \eta^{(1)}\phi_{tz}^{(1)} + \right. \\ &\left. \frac{1}{2}\ \left[\left(\phi_x^{(1)}\right)^2 + \left(\phi_z^{(1)}\right)^2\right]\ \right) + \ \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right) = 0\end{aligned} \qquad \text{(XI-34)}$$

y la ecuación de Bernoulli

$$p_+ = p - \rho g z = \varepsilon\left(-\rho\phi_t^{(1)}\right) + \varepsilon^2\left(-\rho\phi_t^{(2)} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\phi_x^{(1)}\right)^2 + \left(\phi_z^{(1)}\right)^2\right]\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right) \qquad \text{(XI-35)}$$

Nótese que en estos casos (ecuaciones no lineales) los términos a cada orden no son iguales.

Si reunimos términos solo de orden ε en las cinco ecuaciones tenemos el problema

$$\phi_{xx}^{(1)} + \phi_{zz}^{(1)} = 0 \qquad \text{(XI-36)}$$

$$\phi_z^{(1)} = 0 \qquad \text{en } z = -h \qquad \text{(XI-37)}$$

$$\eta_t^{(1)} - \phi_z^{(1)} = 0 \qquad \text{en } z = 0 \qquad \text{(XI-38)}$$

$$\phi_t^{(1)} + g\eta^{(1)} = 0 \qquad \text{en } z = 0 \qquad \text{(XI-39)}$$

$$p_+^{(1)} = -\rho\phi_t^{(1)} \qquad \text{(XI-40)}$$

que es idéntico al problema resuelto en la teoría líneal. La justificación de igualar solo los términos $\mathcal{O}(\varepsilon)$ a cero, independientemente de los demás órdenes, es que, puesto que los demás términos son mucho menores, las igualdades se cumplen a 1^{er} orden de precisión solo con los términos $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Esto implica aceptar que la satisfacción de las igualdades tiene un error a lo sumo de orden ε^2. El error cometido (y aceptado) a este nivel será corregido en su mayor parte en el siguiente paso donde los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ se igualan a cero, dejando errores máximos de $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$, etc. Eventualmente, con todos los ordenes considerados, la satisfacción de las ecuaciones será *"exacta"*. Obviamente esta última aseveración es de carácter teórico puesto que no se puede resolver para un número infinito de términos.

La solución al problema lineal ya fue obtenida en el capítulo III y consiste en

$$\phi^{(1)} = \frac{ag}{\omega}\,\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \qquad \text{(XI-41)}$$

$$\eta^{(1)} = a \cos (kx - \omega t) \tag{XI-42}$$

$$p_{+}^{(1)} = \rho g a \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos (kx - \omega t) \tag{XI-43}$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \tag{XI-44}$$

XI.2.1 Solución de 2° orden.

Recolectando los términos de 2° orden (multiplicados por ε^2) tenemos

$$\phi_{xx}^{(1)} + \phi_{zz}^{(2)} = 0 \tag{XI-45}$$

$$\phi_{z}^{(2)} = 0 \qquad \text{en } z = -h \tag{XI-46}$$

$$\eta_{t}^{(2)} - \phi_{z}^{(2)} = -\phi_{x}^{(1)} \eta_{x}^{(1)} + \eta^{(1)} \phi_{zz}^{(1)} \qquad \text{en } z = 0 \tag{XI-47}$$

$$\phi_{t}^{(2)} + g\eta^{(2)} = -\eta^{(1)} \phi_{tz}^{(1)} - \frac{1}{2} \left[\left(\phi_{x}^{(1)}\right)^2 + \left(\phi_{z}^{(1)}\right)^2 \right] \qquad \text{en } z = 0 \tag{XI-48}$$

$$p_{+}^{(2)} = -\rho\, \phi_{t}^{(2)} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\phi_{x}^{(1)}\right)^2 + \left(\phi_{z}^{(1)}\right)^2 \right] \tag{XI-49}$$

donde los términos de 2°orden (incógnitas) se encuentran en el lado izquierdo y el lado derecho (primeras 4 ecuaciones) tiene solo términos de 1er orden (ya conocidos). Nótese que el problema es igual al de 1er orden salvo que las ecuaciones no son homogéneas puesto que el lado derecho no es nulo. Es importante remarcar que el problema es <u>lineal</u> en $\phi^{(2)}$, $\eta^{(2)}$ y $p_{+}^{(2)}$, esto es, al menos a 2° orden, hemos tenido éxito en substituir la solución de un problema no lineal por el de una sucesión de problemas lineales de orden creciente y por ende con una aportación cada vez menos importante a la solución completa final.

Sin embargo, en forma estricta, es necesario considerar otros términos de 2° orden en las condiciones de superficie libre, que no son obvias de las expansiones obtenidas. Estos términos provienen de las derivadas de $\phi^{(1)}$ con respecto a "x" y a "z" ya que con la expresión obtenida para $\phi^{(1)}$, ambos $\phi_{z}^{(1)}$ y $\phi_{x}^{(1)}$ resultan con "k" como parte de su amplitud, y como estrictamente

$$k = k^{(0)} + \varepsilon\, k^{(1)} + \ldots \qquad \text{(XI-50)}$$

se introducen términos extras de orden ε^2. De llevarse la solución de 2° orden con estos términos se llegan a soluciones no periódicas en tiempo y espacio a menos que $k^{(1)} \equiv 0$. Esto implica que a 2° orden la longitud de onda es igual a la obtenida en la teoría lineal. Sin embargo a órdenes mayores pueden existir (y de hecho existen) correcciones a $k^{(0)}$.

Combinando ambas condiciones de la superficie libre

$$\phi^{(2)}_{tt} + g\,\phi^{(2)}_{z} = -g\left(\eta^{(1)}\phi^{(1)}_{zz} - \phi^{(1)}_{x}\eta^{(1)}_{x}\right) - \eta^{(1)}_{t}\,\phi^{(1)}_{tz} - \eta^{(1)}\,\phi^{(1)}_{tzt}$$

$$-\phi^{(1)}_{x}\phi^{(1)}_{xt} - \phi^{(1)}_{z}\phi^{(1)}_{zt} \qquad \text{en } z = 0 \qquad \text{(XI-51)}$$

Evaluando el lado derecho con las expresiones obtenidas en 1er orden, después de bastante algebra se obtiene.

$$\phi^{(2)}_{tt} + g\phi^{(2)}_{z} = 3ag\omega\,\frac{ka}{\text{senh } 2kh}\,\text{sen } 2(kx - \omega t) \qquad \text{en } z = 0 \qquad \text{(XI-52)}$$

Siguiendo la variación en "x", "z" y "t" sugerida por la ecuación anterior una solución a la ecuación de Laplace y la condición de fondo es

$$\phi^{(2)} = A_2 \cosh 2k(z+h)\ \text{sen } 2(kx-\omega t) \qquad \text{(XI-53)}$$

y la satisfacción de la condición combinada de superficie produce

$$A_2 = \frac{3}{8}\,\frac{a^2\omega}{\text{senh}^4 kh} \qquad \text{(XI-54)}$$

Por generalidad se considera la solución a 2° orden

$$\phi^{(2)} = \frac{3}{8}\,a^2\omega\,\frac{\cosh 2k(z+h)}{\text{senh}^4 kh}\,\text{sen } 2(kx - \omega t) + K_1 x + K_2 t + K_3$$

(XI-55)

El término K_3 es un término arbitrario que no afecta en nada al campo de velocidades, por lo que lo podemos considerar nulo. El término "$K_2 t$"

representa una presión de 2° orden asociada con la función del tiempo arbitraria que puede siempre incluirse en el potencial de velocidades. Finalmente el término $K_1 x$ representa una corriente horizontal unidireccional no oscilatoria.

De la condición dinámica de superficie se tiene

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g}\left(\phi_t^{(2)} + \eta^{(1)}\phi_{tz}^{(1)} + \frac{1}{2}\left[\left(\phi_x^{(1)}\right)^2 + \left(\phi_z^{(1)}\right)^2\right]\right) \quad \text{en } z = 0$$

(XI-56)

Substituyendo las expresiones ya conocidas para $\phi^{(2)}$, $\phi^{(1)}$ y $\eta^{(1)}$ con la consideración de que a 2° orden la relación de dispersión sigue siendo invariante con respecto a la de 1er orden se obtiene

$$\eta^{(2)} = \frac{ka^2}{4}\,\frac{\cosh kh\ (3 + 2\,\mathrm{senh}^2 kh)}{\mathrm{senh}^3\, kh}\cos 2(kx - \omega t)$$

$$- \frac{ka^2}{2}\,\frac{1}{\mathrm{senh}\ 2kh} - \frac{K_2}{g} \qquad \text{(XI-57)}$$

Si consideramos el origen de z en el nivel de aguas quietas, por conservación de masa.

$$\int_0^L \eta\, dx = \int_0^L \left(\eta^{(1)} + \eta^{(2)}\right) dx = 0 \qquad \text{(XI-58)}$$

de donde

$$K_2 = -\frac{gka^2}{2}\,\frac{1}{\mathrm{senh}\ 2kh} = -\frac{a^2\omega^2}{4}\,\frac{1}{\mathrm{senh}^2\, kh} \qquad \text{(XI-59)}$$

con lo cual

$$\eta^{(2)} = \frac{ka^2}{4}\,\frac{\cosh kh\ (3+2\,\mathrm{senh}^2 kh)}{\mathrm{senh}^3\, kh}\cos 2(kx-\omega t) \qquad \text{(XI-60)}$$

Nótese que la corrección a 2° orden de ϕ y η es un segundo armónico del 1^er orden (varía con dos veces la frecuencia espacial o temporal de la onda de 1^er orden) y el efecto final en la superficie es de crestas más agudas que los valles puesto que las crestas se suman mientras que el valle de la onda de 1^er orden se ve reducida por otra cresta de la onda de 2° orden (ver fig. XI.1). Sin embargo, a pesar de la asimetría del perfil de la superficie libre, la altura de ola H sigue definiendo la diferencia entre el nivel de cresta y el nivel del valle. Esta es la razón de la aseveración en previos capítulos acerca de que el uso de H (sobre a) contrarresta la falta de consideración de algunos efectos no lineales.

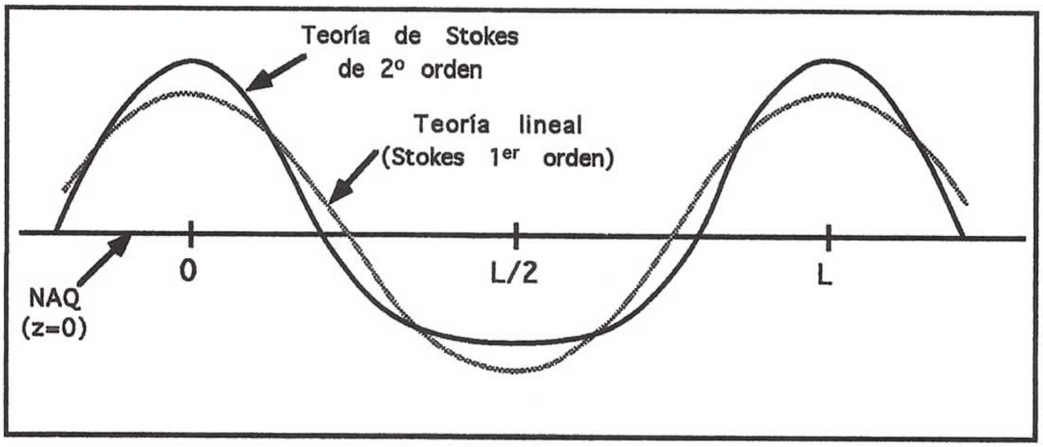

Fig. XI.1. Comparación de los perfiles de la superficie entre la teoría de Stokes de 2° orden y la teoría lineal (para el caso específico de H=60 cm, h=3 m y L=30 m). Fuente: Madsen (1982).

Aún falta por definir la constante K_3. Esto lo podemos hacer evaluando el flujo horizontal promedio en el tiempo en dirección de la propagación del oleaje.

$$q_x = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-h}^{\eta} u\, d_z\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-h}^{\eta} \left(\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(2)}\right) d_z\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left\{ \int_{-h}^{0} \left(\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(2)}\right) dz + \int_0^{\eta} \left(\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(2)}\right) dz \right\} dt \qquad \text{(XI-61)}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_{-h}^{0} \left(\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(2)} \right) dz + \eta^{(1)} \left(\phi_x^{(1)} \right)_{z=0} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3 \right) \right\} dt$$

que se lleva solo a orden de precisión $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Introduciendo las expresiones para $\phi_x^{(1)}$, $\phi_x^{(2)}$ y $\eta^{(1)}$ e integrando se obtiene

$$q_x = K_1 h + \frac{1}{2} a^2\omega \coth kh \qquad \text{(XI-62)}$$

ó de otra forma

$$K_1 = U_r = \frac{q_x}{h} - \frac{1}{2} a^2\omega \frac{\coth kh}{h} \qquad \text{(XI-63)}$$

En un dominio infinito (en dirección x) no existe razón para que la corriente unidireccional U_r exista (= 0) por lo que

$$q_x = \frac{1}{2} a^2\omega \coth kh \qquad \text{(XI-64)}$$

lo que indica un cierto transporte de masa neto en dirección de propagación del oleaje debido a este oleaje.

En contraste, en un dominio finito (en dirección x) como un canal de laboratorio cerrado la conservación de masa obliga a $q_x = 0$, por lo que

$$K_1 = U_r = -\frac{1}{2} a^2\omega \frac{\coth kh}{h} \qquad \text{(XI-65)}$$

que indica el establecimiento de una corriente de retorno (en contra de la dirección de propagación de oleaje) para contrarrestar el transporte de masa neto mencionado. La estructura de dicho transporte será estudiado más adelante.

En resumen, considerando esta relativa indeterminación de K_1, el potencial de velocidad a 2° orden se puede expresar como