

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} \quad (\text{XI-66})$$

con

$$\phi^{(1)} = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \text{sen}(kx - \omega t) \quad (\text{XI-67})$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & \frac{3}{8} a^2 \omega \frac{\cosh 2k(z+h)}{\sinh^4 kh} \text{sen } 2(kx - \omega t) \\ & + U_{rx} - \frac{a^2 \omega^2}{4} \frac{1}{\sinh^2 kh} t \end{aligned} \quad (\text{XI-68})$$

con

$$U_r = \begin{cases} 0 & \text{para dominio abierto} \\ -\frac{1}{2} a^2 \omega \frac{\coth kh}{h} & \text{para dominio cerrado} \end{cases} \quad (\text{XI-69})$$

El campo de velocidades de 2º orden se calcula con

$$U = \phi_x^{(1)} + \phi_x^{(2)} \quad W = \phi_z^{(1)} + \phi_z^{(2)} \quad (\text{XI-70})$$

mientras que el de aceleraciones se calcula con

$$\frac{Du}{Dt} = \phi_{xt}^{(1)} + \phi_{xt}^{(2)} + \phi_x^{(1)} \phi_{xx}^{(1)} + \phi_z^{(1)} \phi_{xz}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\text{XI-71})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \phi_{zt}^{(1)} + \phi_{zt}^{(2)} + \phi_x^{(1)} \phi_{zx}^{(1)} + \phi_z^{(1)} \phi_{zz}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\text{XI-72})$$

donde el 3º y 4º término provienen de la parte de aceleración convectiva en la definición de Du/Dt y Dw/Dt .

Sin establecer explícitamente las expresiones nos limitaremos a mencionar que la corrección de 2º orden hace asimétrica la variación de velocidades

y aceleraciones, por ejemplo, la velocidad horizontal $u(x,z,t)$ es mayor bajo la cresta (en valor absoluto) que bajo el valle de la onda progresiva.

Este es un buen momento para puntualizar que el potencial de velocidades a 2° orden es igual al de 1° orden cuando $kh \rightarrow \infty$ (olas en aguas profundas), por lo que nuestra normalización basada en aguas someras se justifica. Esto es, la corrección de 2° orden se reduce conforme la profundidad relativa aumenta hasta desaparecer en aguas infinitamente profundas.

El campo de presiones a 2° orden (de la ec. de Bernoulli) es:

$$p_+ = p_+^{(1)} + p_+^{(2)} + \quad (\text{XI-73})$$

con

$$p_+^{(2)} = \frac{1}{2} \rho g a \frac{ka}{\sinh 2kh} \left(\frac{3 \cosh \frac{2k(z+h)}{kh}}{\sinh^2 \frac{2k(z+h)}{kh}} - 1 \right) \cos 2(kx - \omega t) - \frac{1}{2} \rho g a \frac{ka}{\sinh 2kh} \left(\cosh 2k(z+h) - 1 \right) \quad (\text{XI-74})$$

donde el 1° término representa una variación oscilatoria o segundo armónico de la variación de 1° orden, y el 2° término representa un término invariante en el tiempo, proveniente de un promedio en el tiempo del momentum vertical no nulo, similar a los esfuerzos de Reynolds en flujo turbulento, pero en este caso con variaciones de velocidad vertical conocidas y no aleatorias.

Nótese que este término constante en el tiempo tiene valor cero en el fondo, por lo que un sensor de presión en el fondo registraría únicamente variaciones periódicas de presión debido al oleaje.

XI.2.2 El transporte de masa de Stokes.

En la sección anterior, comprobamos la existencia de un transporte neto de

masa del fluido en dirección de la propagación de oleaje, basados en ecuaciones integradas en la profundidad. Estudiemos ahora con mas detalle la razón y estructura de dicho transporte.

La posición instantánea de una partícula de fluido esta dada por

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_o + \int \phi_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{x}_p, z_p, t \right) dt \quad (\text{XI-75})$$

que a segundo orden es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_o + & \int \phi_{\mathbf{x}}^{(1)} \left(\mathbf{x}_o, z_o, t \right) dt \\ & + \int \left\{ \phi_{\mathbf{x}}^{(2)} \left(\mathbf{x}_o, z_o, t \right) + \left(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o \right)^{(1)} \phi_{\mathbf{xx}}^{(1)} \left(\mathbf{x}_o, z_o, t \right) \right. \\ & \left. + \left(z_p - z_o \right)^{(1)} \phi_{\mathbf{zx}}^{(1)} \left(\mathbf{x}_o, z_o, t \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\} dt \end{aligned} \quad (\text{XI-76})$$

con

$$\left(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o \right)^{(1)} = \int \phi_{\mathbf{x}}^{(1)} \left(\mathbf{x}_o, z_o, t \right) dt \quad (\text{XI-77})$$

y

$$\left(z_p - z_o \right)^{(1)} = \int \phi_z^{(1)} \left(\mathbf{x}_o, z_o, t \right) dt \quad (\text{XI-78})$$

conocidos de la solución de 1^{er} orden, por lo que:

$$\left(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o \right)^{(2)} = \int \left\{ \phi_{\mathbf{x}}^{(2)} + \left(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o \right)^{(1)} \phi_{\mathbf{xx}}^{(1)} + \left(z_p - z_o \right)^{(1)} \phi_{\mathbf{xz}}^{(1)} \right\}_{\left(\mathbf{x}_o, z_o \right)} dt \quad (\text{XI-79})$$

y en forma análoga

$$\left(z_p - z_o \right)^{(2)} = \int \left\{ \phi_z^{(2)} + \left(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o \right)^{(1)} \phi_{\mathbf{zx}}^{(1)} + \left(z_p - z_o \right)^{(1)} \phi_{\mathbf{zz}}^{(1)} \right\}_{\left(\mathbf{x}_o, z_o \right)} dt \quad (\text{XI-80})$$

que tras introducir las expresiones conocidas para los términos del lado derecho, integrar y una considerable algebra, se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
 (x_p - x_0)^{(2)} = & - \frac{ka^2}{8 \sinh^2 kh} \left(3 \frac{\cosh 2k(z_0 + h)}{\sinh^2 kh} - 2 \right) \sin 2(kx - \omega t) \\
 & + \frac{ka^2}{2 \sinh^2 kh} \left(\cosh 2k(z_0 + h) - \frac{\sin 2kh}{2 kh} \right) \omega t
 \end{aligned}
 \tag{XI-81}$$

y

$$\begin{aligned}
 (z_p - z_0)^{(2)} = & \frac{3}{8} ka^2 \frac{\sinh 2k(z_0 + h)}{\sinh^4 kh} \cos 2(kx_0 - \omega t) \\
 & + \frac{1}{4} ka^2 \frac{\sinh 2k(z_0 + h)}{\sinh^2 kh}
 \end{aligned}
 \tag{XI-82}$$

En ambas ecuaciones los primeros términos son los esperados 2^o armónicos a la onda de 1^{er} orden, pero los segundos términos representan términos no periódicos. El resultado mostrado para $(x_p - x_0)^{(2)}$ (ec.XI-81) corresponde al caso de un canal cerrado con transporte neto total integrado en la vertical nulo, $q_x = 0$. El segundo término indica que existe un desplazamiento neto de las partículas proporcional al tiempo (el término no es oscilatorio), o sea las órbitas no son cerradas, como se observa en la fig. XI.2.

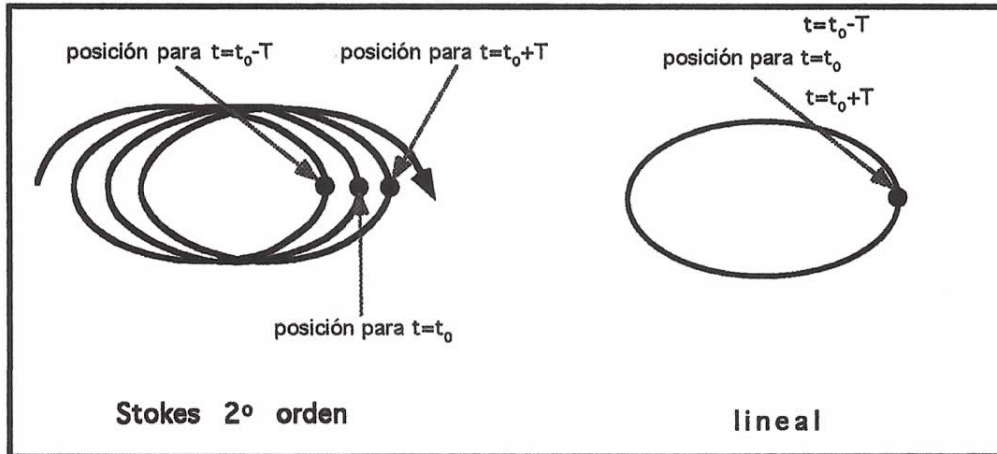


Fig. XI.2. Esquema de órbitas de partículas para las teorías de Stokes de 2º orden y lineal.

El transporte promedio (en el tiempo) por unidad de tiempo es la velocidad de transporte de masa de Stokes en dirección de propagación del oleaje.

$$\begin{aligned}
 U_M = U_M(z_0) &= \frac{\frac{1}{T} \int_0^T (x_p - x_0) dt}{t} = & (XI-83) \\
 &= \frac{ka^2\omega}{2\sinh^2 kh} (\cosh 2k(z_0+h) - \frac{\sinh 2kh}{2kh})
 \end{aligned}$$

Debido a que esta basado en flujo no viscoso, este resultado no se considera correcto, pero nos indica la presencia a 2º orden de un cierto transporte de masa por el oleaje.

El segundo término para $(z_p - z_0)^{(2)}$ produce un nivel promedio de las partículas en su órbita desigual a z_0 , lo que se explica a partir de que ahora una partícula si esta sujeta a diferentes velocidades verticales cuando se encuentra arriba de z_0 (mayores) que cuando se encuentra abajo de z_0 (menores) por lo que permanece mas tiempo arriba de z_0 que abajo de z_0 , siendo el promedio temporal de su posición superior al nivel z_0 (que es el centro geométrico de la trayectoria).

Una gráfica de $U_M(z)$ para los casos de los límites aproximados entre aguas

profundas e intermedias, $h/L = 1/2$, y entre aguas intermedias y someras, $h/L = 1/20$, en un canal cerrado, con cero transporte neto, se puede observar en la fig. XI.3. Nótese que en un canal infinito o en el mar abierto el oleaje puede producir una corriente unidireccional neta en la dirección de propagación del oleaje y cerca de la costa (con incidencia normal) una circulación donde el agua es transportada hacia la costa en la porción superficial y retornada en la porción profunda, como se ilustra en la fig. XI.4.

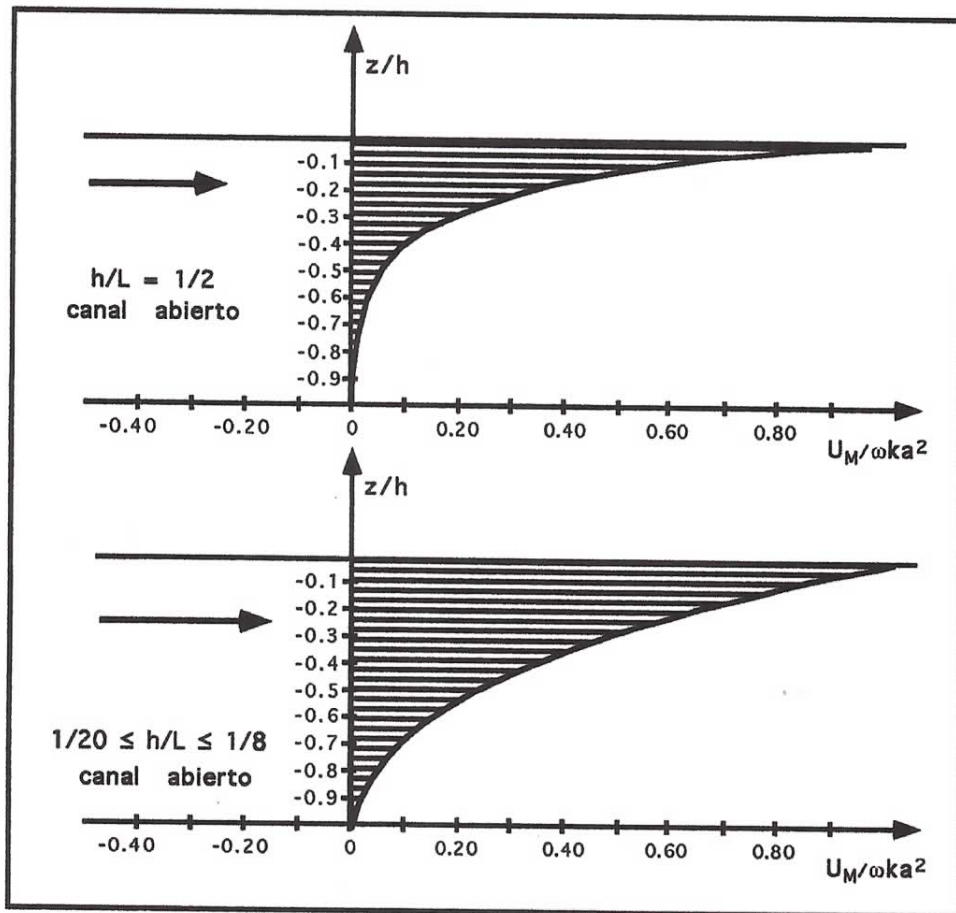


Fig. XI.3. Distribución vertical del transporte de masa de Stokes para el caso de un canal abierto y para los límites de aguas profundas-intermedias ($h/L=1/2$) e intermedias-someras ($h/L=1/20$). Nota: la diferencia dentro del rango $1/20 \leq h/L \leq 1/8$ es indistinguible. La analogía del canal abierto sería el caso aplicable a oleaje en una zona donde una corriente unidireccional puede generarse.

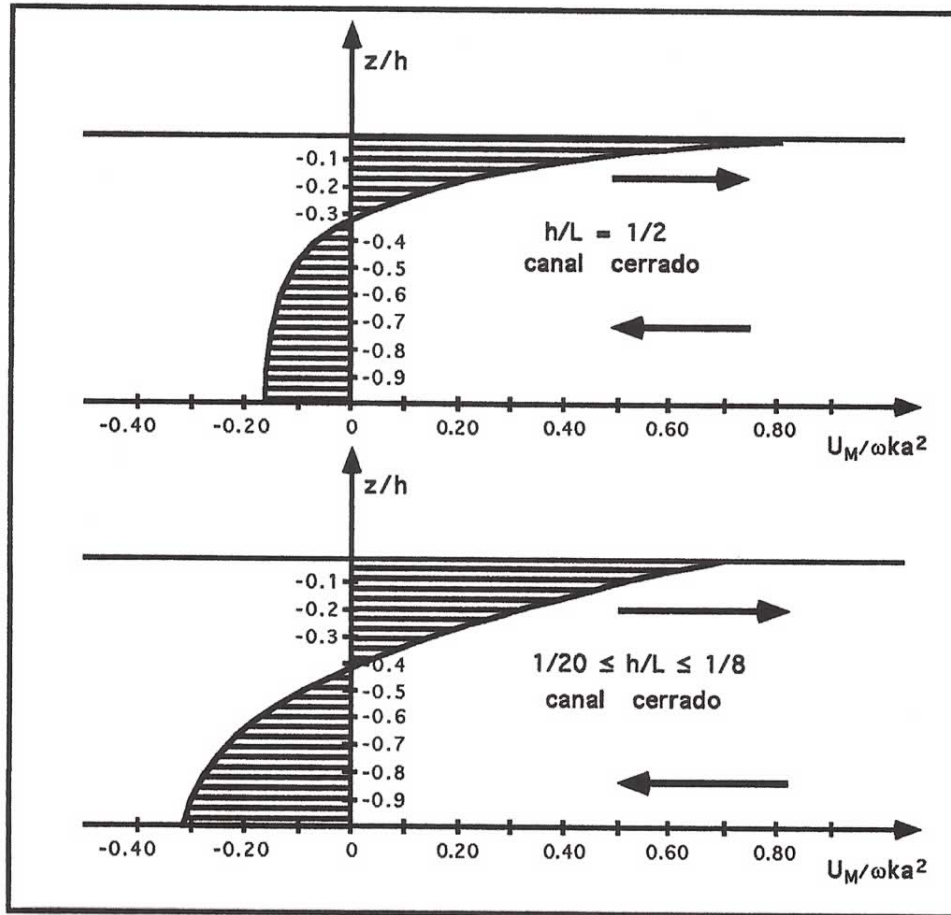


Fig. XI.4. Distribución vertical del transporte de masa de Stokes para el caso de un canal cerrado y para los límites de aguas profundas-intermedias ($h/L=1/2$) e intermedias-someras ($h/L=1/20$). Nota: la diferencia dentro del rango $1/20 \leq h/L \leq 1/8$ es indistinguible. La analogía del canal cerrado sería el caso aplicable a oleaje plano incidiendo normalmente sobre un litoral recto.

XI.2.3 Principio de conservación de momentum.

De la hidráulica de canales a superficie libre se conoce la utilidad de aplicar el principio de conservación de momentum en problemas donde las pérdidas de energía son desconocidas (como el salto hidráulico) por lo que el principio de conservación de energía resulta inútil.

De la misma manera, en problemas de oleaje es a veces conveniente aplicar el principio de conservación de momentum. Esto no se había planteado antes puesto que la teoría lineal no produce ningún transporte neto de

momentum.

Definamos el promedio temporal del momentum integrado en la vertical por unidad de ancho de cresta como el *esfuerzo de radiación*:

$$S_{xx} = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_{-h}^{\eta} (p + \rho u^2) dz + \int_{-h}^0 \rho g z dz \right\} dt \quad (\text{XI-84})$$

donde el último término elimina la contribución hidrostática del agua en reposo. Usando nuestra definición de p_+ esto se puede expresar como

$$S_{xx} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 (p_+ + \rho u^2) dz dt + \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{\eta} p dz dt \quad (\text{XI-85})$$

e introduciendo las expansiones, manteniendo términos solo de orden ϵ^2

$$S_{xx} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 \left(p_+^{(1)} + p_+^{(2)} + \rho (\phi_x^{(1)})^2 \right) dz dt + \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{\eta^{(1)}} \rho g (\eta^{(1)} - z) dz \quad (\text{XI-86})$$

Siendo obvio que los términos armónicos (periódicos) tienen un aporte nulo al promedio temporal, introduciendo las expresiones conocidas del lado derecho e integrando se llega a

$$S_{xx} = E \left(2 \frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{XI-87})$$

En forma similar el *esfuerzo de radiación* en dirección normal a la propagación de oleaje es

$$\begin{aligned}
S_{yy} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_{-h}^{\eta} (p + \rho v^2) dz + \int_{-h}^0 \rho g z dz \right\} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\eta} p dz dt + \int_{-h}^0 \rho g z dz \\
&= E \left(\frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{XI-88}$$

donde el término ρv^2 es nulo debido a que no existe velocidad de las partículas en dirección normal a la de propagación del oleaje. Así mismo, el *esfuerzo de radiación* tangencial es

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\eta} \rho(uv) dz = 0 \tag{XI-89}$$

donde nuevamente debido a que $v=0$ el integrando es nulo.

La contabilidad de estos *esfuerzos de radiación* en un volumen de control indica que, de haber algún desbalance entre lo que entra y lo que sale (en estado permanente), se tiene que balancear ya sea con una corriente o con una sobre elevación del nivel del mar. Sin entrar a mas detalles, esto indica la factibilidad de que el oleaje produzca uno o ambos efectos mencionados inclusive en la dirección normal a la propagación.

XI.2.4 Sobre la solución a 3^{er} orden.

La solución de 3^{er} orden produce obviamente tercerosarmónicos a ϕ , η , u , w , α_x , α_y , p_+ , etc. además de otros efectos no tan obvios. Quizá el mas interesante es que a 3^{er} orden, la relación de dispersión queda.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \left\{ 1 + (ka)^2 \frac{8 + \cosh 4kh}{8 \sinh^4 kh} \right\} \tag{XI-90}$$

donde

$$k = k^{(0)} + \varepsilon^2 k^{(2)} \quad (\text{XI-91})$$

Esta expresión implica una celeridad de onda $c = \omega/k$ que es función de la amplitud (no solo del período o longitud de onda), o sea, aún para olas de igual frecuencia, las mas altas se mueven (ligeramente) más rápido que las mas bajas. A esto se le llama dispersión por amplitud.

Otro punto interesante se refiere a la longitud de onda en agua profunda L_0 . Para aguas profundas $kh \gg 1$ la relación de dispersión es

$$\omega^2 = gk (1+(ka)^2) \quad (\text{XI-92})$$

Una ola de pendiente máxima $H/L = 0.142$ ($ks = 0.45$) tiene una longitud de onda en el límite de rompimiento de

$$L \cong 1.2 L_0 \quad (\text{XI-93})$$

donde L_0 es el valor de la teoría lineal, (obtenido de $\omega^2 = gk$). Esto explica la utilización del factor 1.2 en criterios de diseño de obras y de ubicación de rompientes que requiere teorías no lineales. Nótese que en aguas profundas, una ola de cierta ω tendría una longitud L_0 mientras fuera infinitesimal y conforme fuera creciendo en altura (digamos por efecto del viento) adquiriría una longitud de onda creciente con un máximo de un 20% sobre su valor original al ocurrir su rompimiento.

XI.2.5 Límites de aplicabilidades de la teoría de Stokes.

Podemos obtener una idea intuitiva sobre los límites de aplicabilidad de teoría de Stokes comparando la magnitud relativa de los términos sucesivos en la serie, por ejemplo

$$\frac{|\eta^{(2)}|}{|\eta^{(1)}|} \quad (\text{XI-94})$$

que deber ser $\ll 1$ para ser aplicable. Estrictamente esta relación solo nos dice que tan grande es la corrección necesaria a la teoría lineal pero presumiblemente la relación tiene el mismo orden de magnitud que

$$\frac{|\eta^{(n+1)}|}{|\eta^{(n)}|} \quad \text{para cualquier } n \quad (\text{XI-95})$$

donde n se refiere al orden de la teoría de Stokes de interés. Con las expresiones que hemos obtenido

$$\frac{|\eta^{(2)}|}{|\eta^{(1)}|} = \frac{ka}{4} \frac{\cosh kh (3+2 \sinh^2 kh)}{\sinh^3 kh} \quad (\text{XI-96})$$

Para aguas profundas la ec. XI-96 se simplifica a

$$\frac{|\eta^{(2)}|}{|\eta^{(1)}|} = \frac{1}{2} ka = \frac{\pi}{2} \frac{H_o}{L_o} \quad (\text{XI-97})$$

Puesto que la onda de máxima no-linealidad está limitada por el criterio de rompiente $H_o/L_o \cong 0.142$, la corrección máxima imaginable sería de

$$\left(\frac{|\eta^{(2)}|}{|\eta^{(1)}|} \right)_{\max} \cong 0.22 \quad (\text{XI-98})$$

ciertamente un valor que nos hace confiar en la aplicación de la teoría de Stokes en aguas profundas puesto que aún este valor máximo es $\ll 1$.

Para aguas poco profundas

$$\left(\frac{|\eta^{(2)}|}{|\eta^{(1)}|} \right) = \frac{3}{4} \frac{ka}{(kh)^3} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{L^2 a}{h^3} \quad (\text{XI-99})$$

Para considerar esto mucho menor a 1 requerimos

$$\frac{L^2 a}{h^3} \ll \frac{16\pi^2}{3} = 52 \quad (\text{XI-100})$$

Esto es ciertamente una restricción importante, por ejemplo, para el límite aproximado de aguas someras $h/L = 1/20$ esto requiere que

$$\frac{a}{h} \ll \frac{1}{8} \quad (\text{XI-101})$$

o sea, la amplitud puede ser solo una muy pequeña fracción de la

profundidad para que la teoría de Stokes sea aplicable. En realidad existe una restricción previa. Se puede demostrar que para

$$\frac{|\eta^{(2)}|}{|\eta^{(1)}|} > 1/4 \quad (\text{XI-102})$$

la superposición de los primeros 2 armónicos produce una cresta secundaria en el valle de la ola principal, como se ilustra en la fig. XI.5

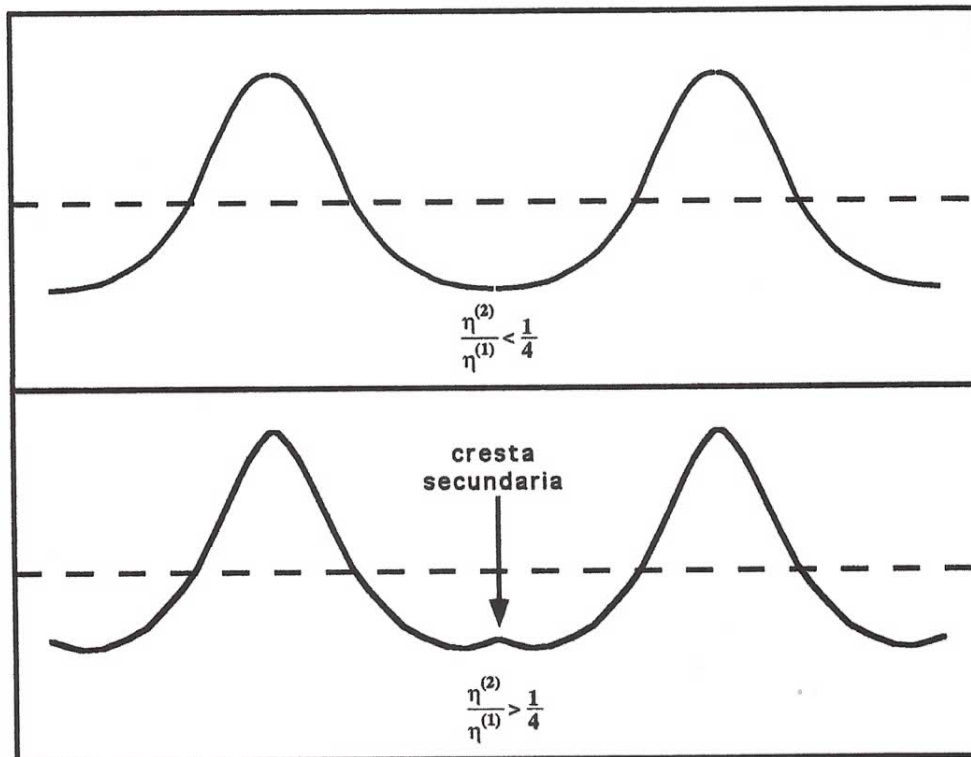


Fig. XI.5. Ilustración de la cresta secundaria que se presenta cuando la componente de segundo orden es mayor a 1/4 de la componente de primer orden.

que no existe en la naturaleza por lo que en este sentido la teoría se restringe a

$$\frac{L^2 a}{h^3} \leq 13 \quad \text{ó} \quad U = \frac{L^2 H}{h^3} \leq 26 \quad (\text{XI-103})$$

donde U es el parámetro de Ursell que es una medida de la no-lineal del

oleaje.

Es pues conveniente no utilizar la teoría de Stokes (de ningún orden) mas allá de $U \leq 26$ prefiriendo alguna teoría mas adecuada para ondas largas para $U > 26$ (como la teoría cnoidal).

La energía específica y el flujo de energía a 2º orden permanecen igual que a 1º orden (cuando se expresan en términos de H) por lo que los estudios de refracción basados en teoría lineal pueden considerarse adecuados mientras $U \leq 26$.

Es importante puntualizar que no existe una teoría no-lineal de oleaje uniformemente válida para cualquier profundidad relativa (con respecto a L y/o H) y la decisión del punto preciso donde cambiar de teoría es bastante subjetiva y es mejor dejarla al criterio del usuario de las teorías.

XI.3 TEORIA DE OLEAJE DE AIRY

Si suponemos que

$$\varepsilon = \frac{a}{h} = O(1) \quad \text{y} \quad \mu = \frac{h}{L} \ll 1 \quad (\text{XI-104})$$

(olas con amplitud del orden de la profundidad pero longitud mucho mayor a la profundidad) obtendremos ecuaciones adecuadas para ondas largas de amplitud finita. Substituyendo ε por 1 en las ecuaciones adimensionales (ecs. XI-12* a XI-15*) obtenemos:

$$\phi_{zz} + \mu^2 \phi_{xx} = 0 \quad (\text{XI-105*})$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{en } z = -1 \quad (\text{XI-106*})$$

$$\mu^2 (\eta_t + \phi_x \eta_x) = \phi_z \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{XI-107*})$$

$$\phi_t + \eta + \frac{1}{2} \left(\phi_x^2 + \frac{1}{\mu^2} \phi_z^2 \right) = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{XI-108*})$$

ecuaciones que sugieren una solución del tipo

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{2n} \phi^{(n)} \quad (\text{XI-109*})$$

A primer orden la ecuación de Laplace (ec. XI-105*) es

$$\phi_{zz}^{(0)} = 0 \quad (\text{XI-110*})$$

que integrada dos veces produce

$$\phi^{(0)} = f(x,t) \quad (\text{XI-111*})$$

A segundo orden la ecuación de Laplace es

$$\phi_{zz}^{(1)} = -\phi_{xx}^{(0)} = -f_{xx} \quad (\text{XI-112*})$$

que integrada dos veces produce

$$\phi^{(1)} = -\frac{1}{2} (z+1)^2 f_{xx} \quad (\text{XI-113*})$$

Introduciendo estos resultados en las condiciones de superficie libre (ecs. XI-107* y XI-108*) a 1^{er} orden producen

$$\eta_t^{(0)} + \left\{ f_x (a + \eta^{(0)}) \right\}_x = 0 \quad (\text{XI-114*})$$

$$f_t + \mu + \frac{1}{2} f_x^2 = 0 \quad (\text{XI-115*})$$

Pero reconociendo que $f_x = \phi_x^{(0)} = u^{(0)}$, la primera de las ecuaciones anteriores es la familiar ecuación de continuidad, que en forma dimensional es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u(h+\eta) \right\} = 0 \quad (\text{XI-116})$$

para flujo no permanente en flujo unidireccional a superficie libre.

Derivando la segunda (ec.XI-115*) con respecto a x' (x adimensional) produce, en forma dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{XI-117})$$

que es la forma aproximada de la ecuación de momentum para las mismas condiciones de flujo

Estas dos ecuaciones son llamadas las ecuaciones no lineales de oleaje en aguas someras de Airy. Su aplicabilidad es mas bien en flujo transitorio en canales a superficie libres y su solución no será tratada aquí. Se refiere al lector a textos de hidráulica de canales como Henderson (1965).

XI.4 TEORIA CNOIDAL DE OLEAJE

Buscando una teoría adecuada para olas relativamente largas (en aguas relativamente someras) y debilmente no lineales, suponemos

$$\mu = \frac{h}{L} = \mathcal{O}(1) \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{a}{h} = \mathcal{O}(\mu^2) \quad (\text{XI-118})$$

o sea, similar a la teoría de Stokes, pero con la no linealidad de amplitud ligada a la profundidad relativa, en lugar de la longitud de onda.

Substituyendo en las ecuaciones gobernantes normalizadas (ecs. XI-112* a XI-115*) a ε por μ^2 se obtiene

$$\phi_{zz} + \mu^2 \phi_{xx} = 0 \quad (\text{XI-119*})$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{en} \quad z = 1 \quad (\text{XI-120*})$$

$$\mu^2 \eta_t + \mu^4 \phi_x \eta_x - \phi_z = 0 \quad \text{en} \quad z = \mu^2 \eta \quad (\text{XI-121*})$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\mu^2 \phi_x^2 + \phi_z^2) + \eta = 0 \quad \text{en} \quad z = \mu^2 \eta \quad (\text{XI-122*})$$

que sugiere una solución de la forma