

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{2n} \phi^{(n)} \quad (\text{XI-123}^*)$$

Integrando la ecuación de Laplace (ec. XI-119*) a orden 0 ($\phi_{zz}^{(0)} = 0$) se obtiene

$$\phi^{(0)} = f(x,t) = f \quad (\text{XI-124}^*)$$

De la ecuación de Laplace (XI-119*) a 1^{er} orden ($\phi_{zz}^{(1)} = -\phi_{xx}^{(0)} = -f_{xx}$), integrando se obtiene

$$\phi^{(1)} = -\frac{1}{2} (z+1)^2 f_{xx} \quad (\text{XI-125}^*)$$

De la ecuación de Laplace (XI-119*) a 2^o orden ($\phi_{zz}^{(2)} = -\phi_{xx}^{(1)}$) integrando se obtiene

$$\phi^{(2)} = +\frac{1}{24} (z+1)^4 f_{xxxx} \quad (\text{XI-126}^*)$$

La velocidad (adimensional) en $z' = -1$ ($z = -h$) es

$$\phi_x^{(0)} = u^{(0)} \quad (\text{XI-127}^*)$$

mientras que la distribución de la velocidad adimensional en la vertical es

$$u = u^{(0)} - \mu^2 \frac{1}{2} (1+z^2) u_{xx}^{(0)} + O(\mu^4) \quad (\text{XI-128}^*)$$

con un valor promedio en la profundidad

$$\bar{u} = \frac{1}{1+\mu^2\eta} \int_{-1}^{\mu^2\eta} u dz = u^{(0)} - \mu^2 \frac{1}{6} u_{xx}^{(0)} + O(\mu^4) \quad (\text{XI-129}^*)$$

De la condición cinemática de superficie (ec. XI-121*) se obtiene

$$\begin{aligned} \mu^2 \eta_t + \mu^4 f_x \eta_x &= -\mu^2 (1+\mu^2\eta) f_{xx} \\ &+ \mu^4 \frac{1}{6} (1 + \mu^2\eta)^3 f_{xxxx} + O(\mu^6) = \end{aligned}$$

$$-\mu^2 f_{xx} - \mu^4 \left(\eta f_{xx} + \frac{1}{6} f_{xxxx} \right) + O(\mu^6) \quad (\text{XI-130}^*)$$

y como $f_x = u^{(0)}$ y usando la expresión para \bar{u} la última ecuación se puede escribir como

$$\eta_t + \left\{ (1 + \mu^2 \eta) \bar{u} \right\}_x = O(\mu^4) = 0 \quad (\text{XI-131}^*)$$

que en términos de variables físicas (dimensionales) es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h + \eta) \bar{u} \right\} = 0 \quad (\text{XI-132})$$

donde \bar{u} es la velocidad horizontal promedio en la vertical

$$\bar{u} = \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} u dz \quad (\text{XI-133})$$

Derivando la condición dinámica de superficie (adimensional), ec. XI-122*, con respecto a x' e introduciendo las expresiones ya obtenidas para $\phi^{(0)}$, $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$ se tiene

$$\bar{u}_t + \mu^2 \bar{u} \bar{u}_x - \mu^2 \frac{1}{3} \bar{u}_{xxt} + \eta_x = 0 \quad (\text{XI-134}^*)$$

que en términos de variables físicas es

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (\text{XI-135})$$

El 3^{er} término se debe a la desviación de la distribución vertical de presiones de la hidrostática.

Las ecuaciones en el recuadro se conocen como las ecuaciones de Boussinesq y tienen solución periódica de forma permanente, llamadas olas "cnoidales". Se refiere al lector interesado en las suposiciones detrás de la aproximación de ondas largas a Peregrine (1972).

La solución mencionada se debe a Kortweg y DeUries y data de 1895. Los detalles y las expresiones matemáticas son sumamente complicados. Aquí solo mencionaremos los principales resultados. Se refiere al lector interesado en los detalles a Svendsen (1972).

La solución en cuanto a la superficie libre se expresa como

$$\eta = \eta_{\min} + H \operatorname{cn}^2(\theta, m) \quad (\text{XI-136})$$

donde H es la altura de la ola y η_{\min} la altura del nivel mínimo (valle) debajo del nivel de agua estática ($\eta_{\min} \leq 0$), como se puede observar en la fig. XI.6.

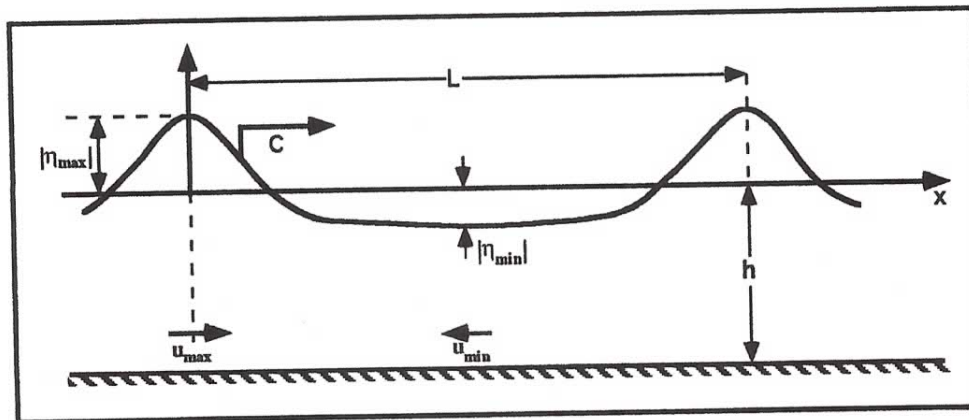


Fig. XI.6. Esquema de definición para ondas cnoidales. Fuente: Madsen (1982).

La función cn es el coseno elíptico Jacobiano y esta nomenclatura dió origen al nombre de olas cn -oidales en analogía con las olas sinusoidales. Es función de dos parámetros, θ y m . El primero, θ , es similar a la fase

$$\theta = 2K \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \quad (\text{XI-137})$$

donde $2K$ es la periodicidad de la función. La función varía periódicamente de 0 cuando $\theta = -K$ a 1 en $\theta = 0$ y otra vez a 0 en $\theta = K$. El parámetro m no controla la forma específica de esta variación periódica.

Cuando $m \rightarrow 0$ entonces $2K \rightarrow \pi$ y la superficie libre se aproxima a una

sinusoide mientras que cuando $m \rightarrow 1$ la superficie se aproxima a una onda solitaria (no periódica) cuyo perfil se encuentra todo sobre el nivel estático de agua definido por

$$\eta = H \cosh^{-2} \left(\sqrt{\frac{3H}{4h}} \frac{x - ct}{h} \right) \quad (\text{XI-138})$$

como se muestra en la fig. XI.7. A pesar de que esta solución ha sido conocida desde 1895, nunca fue popular en la práctica ingenieril debido al complicado uso del coseno elíptico Jacobiano. Sólo en forma reciente fue que el problema de transformación debido a pérdidas de profundidad fue resuelto por Svendsen y Brink-Kjaer (1972) además de presentar tablas que simplifican la aplicación práctica de la teoría.

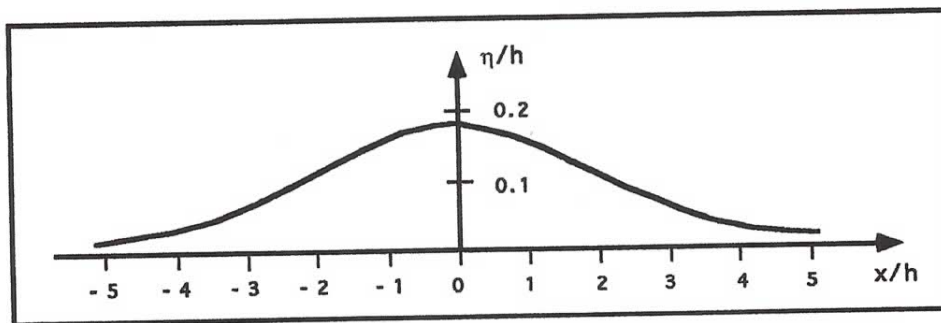


Fig. XI.7. Perfil de la onda solitaria. Fuente: Madsen (1982).

El parámetro fundamental que controla la teoría de ondas cnoidales es el parámetro de Ursell.

$$U = HL^2/h^3 \quad (\text{XI-139})$$

pues m y K son funciones únicamente de U . La fig. XI.8 presenta el perfil de la superficie libre en función de U . Nótese los límites cuando $U \rightarrow 0$ (onda sinusoidal lineal) y cuando $U \rightarrow \infty$ (onda solitaria).

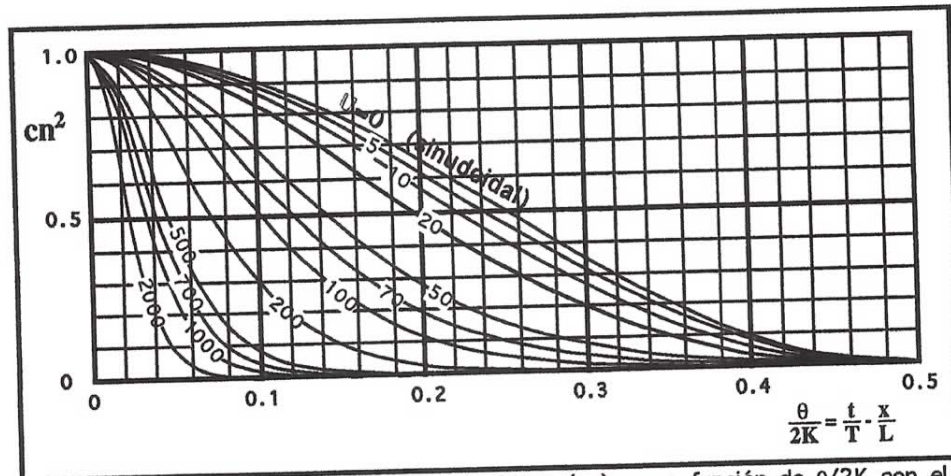


Fig. XI.8. La función coseno elíptico Jacobiano (cn) como función de $\theta/2K$ con el número de Ursell como parámetro. La gráfica muestra la mitad de una longitud de onda. Fuente: Madsen (1982).

Siendo una teoría de ondas debilmente no lineales, es de esperarse que la celeridad de onda dependa de H, de hecho.

$$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gh \left(1 + A \frac{H}{h} \right)} \quad (\text{XI-140})$$

donde A es también función de U y puede obtenerse de la tabla XI.1, misma que permite obtener todos los parámetros necesarios en términos de U. La anterior ecuación es una relación de dispersión para ondas cnoidales y conocido T, es necesario un procedimiento iterativo para obtener L puesto que ambos lados dependen de L. Afortunadamente este tedioso procedimiento ya fue realizado y el uso de la tabla XI.2 lo hace innecesario. Dicha tabla proporciona directamente L/h en términos de H/h y $T \sqrt{g/h}$.

Tabla XI.1. Obtención de parámetros de la teoría cnoidal a partir del número de Ursell. Fuente: Madsen (1982).

U	m	K	η_{\min}/H	A	B	U	m	K	η_{\min}/H	A	B
1	0.07317	1.601	-0.495	-13.152	0.1250	50	0.9673	3.113	-0.312	0.029	0.1149
2	0.1410	1.631	-0.491	-6.565	0.1250	55	0.9753	3.252	-0.301	0.072	0.1134
3	0.2038	1.662	-0.486	-4.365	0.1249	60	0.9813	3.386	-0.290	0.111	0.1119
4	0.2619	1.692	-0.481	-3.261	0.1249	65	0.9856	3.516	-0.280	0.145	0.1104
5	0.3157	1.723	-0.476	-2.596	0.1249	70	0.9889	3.643	-0.271	0.175	0.1090
6	0.3655	1.754	-0.472	-2.151	0.1248	75	0.9913	3.766	-0.263	0.203	0.1075
7	0.4116	1.786	-0.467	-1.830	0.1247	80	0.9932	3.886	-0.255	0.227	0.1061
8	0.4543	1.817	-0.462	-1.588	0.1246	85	0.9946	4.003	-0.248	0.250	0.1048
9	0.4937	1.849	-0.458	-1.399	0.1245	90	0.9957	4.117	-0.242	0.271	0.1034
10	0.5302	1.881	-0.453	-1.245	0.1244	95	0.9966	4.228	-0.235	0.290	0.1021
11	0.5639	1.912	-0.449	-1.119	0.1243	100	0.9972	4.336	-0.230	0.308	0.1009
12	0.5952	1.944	-0.444	-1.012	0.1242	150	0.9996	5.304	-0.188	0.434	0.0902
13	0.6240	1.976	-0.440	-0.921	0.1241	200	0.9999	6.124	-0.163	0.510	0.0822
14	0.6507	2.008	-0.435	-0.842	0.1239	250	1.0	6.847	-0.146	0.562	0.0760
15	0.6754	2.041	-0.435	-0.773	0.1238	300	1.0	7.500	-0.133	0.600	0.0711
16	0.6982	2.073	-0.426	-0.712	0.1236	350	1.0	8.101	-0.123	0.630	0.0671
17	0.7194	2.105	-0.442	-0.657	0.1234	400	1.0	8.660	-0.115	0.654	0.0636
18	0.7389	2.137	-0.418	-0.607	0.1233	450	1.0	9.186	-0.109	0.673	0.0607
19	0.7570	2.169	-0.414	-0.562	0.1231	500	1.0	9.682	-0.103	0.690	0.0582
20	0.7738	2.201	-0.410	-0.521	0.1229	550	1.0	10.155	-0.098	0.705	0.0560
22	0.8036	2.266	-0.402	-0.449	0.1225	600	1.0	10.607	-0.094	0.717	0.0540
24	0.8293	2.329	-0.394	-0.387	0.1220	650	1.0	11.040	-0.091	0.728	0.0522
26	0.8513	2.393	-0.386	-0.333	0.1216	700	1.0	11.456	-0.087	0.738	0.0506
28	0.8702	2.456	-0.379	-0.285	0.1211	750	1.0	11.859	-0.084	0.747	0.0491
30	0.8866	2.519	-0.372	-0.243	0.1206	800	1.0	12.247	-0.082	0.755	0.0478
32	0.9006	2.581	-0.365	-0.204	0.1201	850	1.0	12.624	-0.079	0.762	0.0465
34	0.9128	2.643	-0.358	-0.170	0.1195	900	1.0	12.990	-0.077	0.769	0.0454
36	0.9233	2.704	-0.352	-0.138	0.1190	950	1.0	13.346	-0.075	0.775	0.0443
38	0.9325	2.764	-0.345	-0.109	0.1184	1000	1.0	13.693	-0.073	0.781	0.0434
40	0.9404	2.824	-0.339	-0.082	0.1179	2000	1.0	19.365	-0.052	0.845	0.0318
42	0.9473	2.883	-0.334	-0.056	0.1173	3000	1.0	23.717	-0.042	0.874	0.0263
44	0.9533	2.942	-0.328	-0.033	0.1167	4000	1.0	27.386	-0.037	0.890	0.0230
46	0.9586	3.000	-0.323	-0.011	0.1161	5000	1.0	30.619	-0.033	0.902	0.0207
48	0.9632	3.057	-0.317	0.009	0.1155	6000	1.0	33.541	-0.030	0.911	0.0190
50	0.9673	3.113	-0.312	0.029	0.1149	7000	1.0	36.228	-0.028	0.917	0.0176
						8000	1.0	38.730	-0.026	0.923	0.0165
						9000	1.0	41.079	-0.024	0.927	0.0156
						10000	1.0	43.301	-0.023	0.931	0.0149
						∞	1.0	∞	0.000	1.000	0.0000

Tabla XI.2. Obtención de L/h (interior de la tabla) sin necesidad de un proceso iterativo para la teoría cnoidal. Fuente: Madsen (1982).

H/h	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80
8	6.7	6.7	6.7	6.7	6.8	6.8	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.4	7.6	7.9	8.2	
9	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.1	8.1	8.2	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.8	9.1	9.4	9.7
10	9.2	9.2	9.2	9.2	9.2	9.2	9.3	9.3	9.4	9.5	9.7	9.8	9.9	10.1	10.4	10.8	11.2
11	10.3	10.3	10.3	10.3	10.3	10.3	10.4	10.5	10.6	10.7	10.9	11.0	11.2	11.4	11.8	12.2	12.6
12	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	11.5	11.6	11.8	11.9	12.1	12.3	12.5	12.7	13.1	13.5	14.0
13	12.4	12.4	12.4	12.4	12.5	12.5	12.6	12.7	12.9	13.1	13.3	13.5	13.7	13.9	14.4	14.9	15.4
14	13.5	13.5	13.5	13.5	13.5	13.6	13.7	13.9	14.0	14.2	14.5	14.7	14.9	15.2	15.7	16.2	16.7
15	14.5	14.5	14.5	14.5	14.6	14.6	14.8	15.0	15.2	15.4	15.7	15.9	16.2	16.4	17.0	17.6	18.1
16	15.6	15.6	15.6	15.6	15.6	15.7	15.9	16.1	16.3	16.6	16.8	17.1	17.4	17.7	18.3	18.9	19.5
17	16.6	16.6	16.6	16.6	16.6	16.8	16.9	17.2	17.4	17.7	18.0	18.3	18.6	18.9	19.6	20.2	20.8
18	17.6	17.6	17.6	17.6	17.7	17.8	18.0	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.2	20.9	21.5	22.2
19	18.6	18.6	18.7	18.7	18.7	18.9	19.1	19.4	19.7	20.0	20.4	20.7	21.1	21.4	22.1	22.9	23.6
20	19.7	19.7	19.7	19.7	19.7	19.9	20.2	20.5	20.8	21.2	21.5	21.9	22.3	22.7	23.4	24.2	24.9
21	20.7	20.7	20.7	20.7	20.8	21.0	21.3	21.6	21.9	22.3	22.7	23.1	23.5	23.9	24.7	25.5	26.3
22	21.7	21.7	21.7	21.7	21.8	22.0	22.3	22.7	23.1	23.5	23.9	24.3	24.7	25.1	26.0	26.8	27.6
23	22.7	22.7	22.7	22.8	22.8	23.1	23.4	23.8	24.2	24.6	25.1	25.5	25.9	26.4	27.2	28.1	29.0
24	23.7	23.7	23.8	23.8	23.8	24.1	24.5	24.9	25.3	25.8	26.2	26.7	27.1	27.6	28.5	29.4	30.3
25	24.7	24.8	24.8	24.8	24.9	25.2	25.6	26.0	26.4	26.9	27.4	27.9	28.4	28.8	29.8	30.7	31.7
26	25.7	25.8	25.8	25.9	26.2	26.6	26.6	27.1	27.6	28.1	28.6	29.1	29.6	30.1	31.1	32.0	33.0
27	26.8	26.8	26.8	26.9	26.9	27.3	27.7	28.2	28.7	29.2	29.7	30.2	30.8	31.3	32.3	33.4	34.4
28	27.8	27.8	27.8	27.9	27.9	28.3	28.8	29.3	29.8	30.4	30.9	31.4	32.0	32.5	33.6	34.7	35.7
29	28.8	28.8	28.8	28.9	29.0	29.4	29.9	30.4	30.9	31.5	32.1	32.6	33.2	33.8	34.9	36.0	37.1
30	29.8	29.8	29.9	29.9	30.0	30.4	30.9	31.5	32.1	32.6	33.2	33.8	34.4	35.0	36.1	37.3	38.4
31	30.8	30.8	30.9	30.9	31.0	31.5	32.0	32.6	33.2	33.8	34.4	35.0	35.6	36.7	37.4	38.6	39.7
32	31.8	31.8	31.9	32.0	32.0	32.5	33.1	33.7	34.3	34.9	35.6	36.2	36.8	37.4	38.7	39.9	41.1
33	32.8	32.8	32.9	33.0	33.1	33.6	34.2	34.8	35.4	36.1	36.7	37.4	38.0	38.7	40.0	41.2	42.4
34	33.8	33.9	33.9	34.0	34.1	34.6	35.2	35.9	36.5	37.2	37.9	38.6	39.2	39.9	41.2	42.5	43.8
35	34.8	34.9	34.9	35.0	35.1	35.7	36.3	37.0	37.7	38.4	39.1	39.7	40.4	41.1	42.5	43.8	45.1
36	35.8	35.9	35.9	36.0	36.1	36.7	37.4	38.1	38.8	39.5	40.2	40.9	41.6	42.4	43.8	45.1	46.5
37	36.8	36.9	37.0	37.1	37.2	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.4	42.1	42.9	43.6	45.0	46.4	47.8
38	49.2	37.9	38.0	38.1	38.2	38.8	39.5	40.3	41.0	41.8	41.8	42.5	43.3	44.1	44.8	46.3	47.7
39	38.9	38.9	39.0	39.1	39.2	39.9	40.6	41.4	42.1	42.9	43.7	44.5	45.3	46.0	47.6	49.1	50.5
40	39.9	39.9	40.0	40.1	40.2	40.9	41.7	42.5	43.3	44.1	44.9	45.7	46.5	47.3	48.8	50.4	51.9

Con estas tablas se pueden obtener simplemente:

$$\eta_{\max} = H + \eta_{\min} \quad (\text{XI-141})$$

$$u_{\max} = c \left[\frac{\eta_{\max}}{h} - \left(\frac{\eta_{\max}}{h} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{z+h}{h} \right)^2 \right) \frac{HK^2}{gT^2} \right] \quad (\text{XI-142})$$

bajo la cresta y

$$u_{\min} = c \left[\frac{\eta_{\min}}{h} - \left(\frac{\eta_{\min}}{h} \right)^2 + 4 \left(1-m \right) \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{z+h}{h} \right)^2 \right\} \frac{HK^2}{gT^2} \right] \quad (\text{XI-143})$$

bajo el valle (plano entre dos crestas) y la variación de velocidad en el tiempo-espacio en forma aproximada por

$$u(\theta) = u_{\min} + (u_{\max} - u_{\min}) \text{cn}^2(\theta, m) \quad (\text{XI-144})$$

donde $\text{cn}^2(\theta, m)$ se obtiene de la fig. XI-8.

La velocidad vertical es, en forma aproximada

$$w(\theta) \cong -c(z+h) \left(1 - \frac{2\eta}{h} \right) \frac{\eta_x}{h} \quad (\text{XI-145})$$

donde

$$\eta_x = \pm \frac{4HK}{L} \text{cn}(\theta) \sqrt{1 - \text{cn}^3(\theta)} \sqrt{1 - m + m \text{cn}^2(\theta)} \quad (\text{XI-146})$$

con el signo + correspondiendo a $\theta > 0$.

En cuanto a presiones

$$p_+(\theta) = p_{+\min} + (p_{+\max} - p_{+\min}) \text{cn}^2(\theta, m) \quad (\text{XI-147})$$

con

$$p_{+\max} = \rho g \left[\eta_{\max} - 4h \left(1 - \left(\frac{z+h}{h} \right)^2 \right) \frac{HK^2}{gT^2} \right] \quad (\text{XI-148})$$

y

$$p_{+\min} = \rho g \left[\eta_{\min} + 4h(1-m) \left(1 - \left(\frac{z+h}{h} \right)^2 \right) \frac{HK^2}{gT^2} \right] \quad (\text{XI-149})$$

Lo notable del desarrollo de Svendsen y Brink-Kjaer's es que establecieron una expresión para el flujo de energía que permite calcular la transformación de la ola al entrar a aguas mas someras, o coeficiente K_s .

$$E_F = \rho g H^2 B C \quad (\text{XI-150})$$

donde el parámetro B puede obtenerse de la tabla XI.1 y corresponde, en la teoría de Stokes a

$$B = \frac{1}{8} \frac{C_g}{C} \quad (\text{XI-151})$$

Con esta información y las expresiones para E_F de Stokes y cnoidal se puede ver que si se hace la transición de una teoría a la otra (Stokes a cnoidal al aproximarse a la costa) cuando

$$B_c = \frac{1}{8} C_g \quad (\text{XI-152})$$

el flujo de energía se conserva.

Usando las mismas suposiciones que en la transformación de ondas lineales (y Stokes 2° orden) por cambio de profundidad (pendiente suficientemente suave como para considerar válida localmente la teoría obtenida para fondo horizontal) la invariabilidad de E_F se puede usar con teoría cnoidal para obtener la evolución de H al aproximarse a la costa.

$$E_{F1} = \rho g H_1^2 B_1 C_1 = \rho g H_2^2 B_2 C_2 = E_{F2} \quad (\text{XI-153})$$

Esto requiere un proceso iterativo, que puede evitarse con el uso de la tabla XI.3 que presenta H/H_o como función de h/L_o y H_o/L_o donde el subíndice "o" indica aguas profundas, por lo que

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (\text{XI-154})$$

Tabla XI.3. Obtención de H/H_0 (interior de la tabla) en términos de la profundidad local y de las condiciones del oleaje en aguas profundas. Fuente: Madsen (1982).

h/L_0	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090	0.100									
H_0/L_0																												
0.0002	1.848	1.692	1.593	1.523	1.471	1.428	1.288	1.201	1.199	1.092	1.054	1.023	0.997	0.975	0.939	0.912	0.892	0.877	0.868									
0.0004	2.072	1.837	1.684	1.580	1.506	1.451	1.291	1.202	1.140	1.092	1.054	1.023	0.997	0.975	0.939	0.912	0.892	0.877	0.868									
0.0006	2.261	1.975	1.782	1.648	1.553	1.483	1.296	1.203	1.140	1.092	1.054	1.023	0.997	0.975	0.939	0.912	0.892	0.877	0.868									
0.0008	2.423	2.097	1.876	1.718	1.604	1.520	1.304	1.205	1.141	1.092	1.054	1.023	0.997	0.975	0.939	0.912	0.892	0.877	0.868									
0.0010	2.564	2.207	1.962	1.785	1.656	1.559	1.312	1.207	1.141	1.093	1.054	1.023	0.997	0.975	0.939	0.912	0.892	0.877	0.868									
0.0015	2.860	2.441	2.149	1.937	1.778	1.656	1.339	1.214	1.144	1.094	1.055	1.023	0.997	0.975	0.939	0.912	0.892	0.877	0.868									
0.0020	3.103	2.635	2.308	2.068	1.887	1.746	1.371	1.224	1.147	1.095	1.055	1.024	0.997	0.975	0.939	0.912	0.892	0.877	0.868									
0.0025		2.804	2.447	2.185	1.985	1.829	1.404	1.236	1.151	1.096	1.056	1.024	0.997	0.975	0.939	0.912	0.891	0.877	0.868									
0.0030			2.572	2.269	2.074	1.906	1.438	1.249	1.155	1.098	1.057	1.024	0.997	0.975	0.939	0.912	0.891	0.877	0.868									
0.0035				2.385	2.156	1.976	1.472	1.263	1.161	1.100	1.057	1.024	0.997	0.975	0.939	0.912	0.891	0.877	0.868									
0.0040					2.232	2.042	1.505	1.278	1.167	1.102	1.058	1.025	0.998	0.975	0.939	0.912	0.891	0.877	0.868									
0.0050						2.152	1.569	1.309	1.181	1.108	1.061	1.026	0.998	0.975	0.939	0.912	0.891	0.877	0.868									
0.0060						2.271	1.628	1.341	1.196	1.115	1.063	1.027	0.998	0.975	0.939	0.912	0.891	0.876	0.867									
0.0070						2.370	1.684	1.373	1.212	1.122	1.067	1.028	0.999	0.975	0.939	0.911	0.891	0.876	0.867									
0.0080						2.451	1.736	1.404	1.229	1.131	1.071	1.030	1.000	0.975	0.938	0.911	0.891	0.876	0.867									
0.0090							1.786	1.434	1.247	1.140	1.075	1.032	1.000	0.976	0.938	0.911	0.891	0.876	0.867									
0.0100							1.833	1.464	1.264	1.149	1.080	1.034	1.001	0.976	0.938	0.911	0.890	0.876	0.867									
0.0120							1.921	1.520	1.299	1.170	1.090	1.039	1.003	0.977	0.938	0.910	0.890	0.875	0.866									
0.0140								1.573	1.334	1.191	1.102	1.045	1.005	0.978	0.938	0.910	0.889	0.875	0.866									
0.0160									1.623	1.368	1.213	1.115	1.052	1.009	0.979	0.937	0.909	0.888	0.874	0.865								
0.0180										1.400	1.234	1.128	1.059	1.013	0.980	0.937	0.908	0.888	0.874	0.865								
0.0200											1.432	1.256	1.143	1.068	1.017	0.982	0.937	0.908	0.887	0.873	0.864							
0.0220												1.278	1.157	1.077	1.022	0.985	0.937	0.907	0.886	0.872	0.863							
0.0240													1.299	1.172	1.086	1.028	0.987	0.937	0.906	0.886	0.871	0.862						
0.0260														1.186	1.096	1.034	0.990	0.937	0.906	0.885	0.870	0.862						
0.0280															1.201	1.106	1.040	0.994	0.937	0.905	0.884	0.869	0.861					
0.0300																1.215	1.116	1.046	0.998	0.938	0.904	0.883	0.868	0.860				
0.0320																	1.126	1.053	1.002	0.939	0.904	0.882	0.867	0.859				
0.0340																		1.136	1.060	1.006	0.940	0.903	0.881	0.866	0.858			
0.0360																			1.067	1.011	0.941	0.903	0.880	0.865	0.856			
0.0380																				1.075	1.016	0.942	0.902	0.879	0.864	0.855		
0.0400																					1.082	1.021	0.944	0.902	0.878	0.863	0.854	
0.0500																						1.048	0.954	0.903	0.874	0.857	0.848	
0.0600																							1.077	0.968	0.906	0.872	0.852	0.842
0.0700																								0.985	0.912	0.871	0.848	0.836
0.0800																									0.921	0.872	0.845	0.830
0.0900																										0.875	0.843	0.826
0.1000																											0.843	0.822

En zona sombreada $H/h > 0.8$

Obviamente la transición de teorías conservando el flujo de energía implica monitorear en el procedimiento de cálculo, en el rango de Stokes, a B de la teoría cnoidal, lo que complica el cálculo. En ese sentido puede decidirse la transición arbitraria de una teoría a otra para un valor preestablecido de U (se recomienda el valor 26). Este método implica monitorear únicamente el valor de U .

De cualquier forma en la transición se aplica la expresión de conservación de energía entre Stokes y cnoidal.

$$E_F = \frac{1}{8} \rho g H_1^2 C_{g1} = \rho g H_2^2 B_2 \frac{L_2}{T} \quad \text{(XI-155)}$$

El uso de la tabla XI.3 entre dos secciones donde la teoría cnoidal es aplicable, requiere el cálculo de H_0 , la altura de ola cuando se encontraba en aguas profundas. Esto se puede obtener de la aplicación de la ecuación anterior con la sección 1 en aguas profundas.

$$\frac{1}{8} \rho g H_0^2 \left(\frac{L_0}{T} \right) = \rho g H_2^2 B_2 \frac{L_2}{T} \quad (\text{XI-156})$$

ó

$$H_0 = 4H_2 (B_2 L_2/L_0)^{1/2} \quad (\text{XI-157})$$

Una vez conocido H_0 y L_0 para el cálculo en la primera sección, no es necesario volver a cálculos puesto que permanecen constantes.

Debido a las suposiciones implícitas en la teoría cnoidal (aguas someras) es importante comprobar (a través de U) que la teoría es aplicable en las condiciones de interés antes de utilizarla puesto que no es una teoría universal para cualquier profundidad relativa.

Aunque superficial, lo expuesto permite la aplicación práctica de la teoría cnoidal en muchos problemas. Falta comprobar que tan precisa es. La fig. XI.9 compara resultados experimentales de laboratorio con las teorías lineal y cnoidal al transformarse una ola por reducción de profundidad para varias condiciones. Obviamente la teoría cnoidal es muy superior en su rango de aplicación.

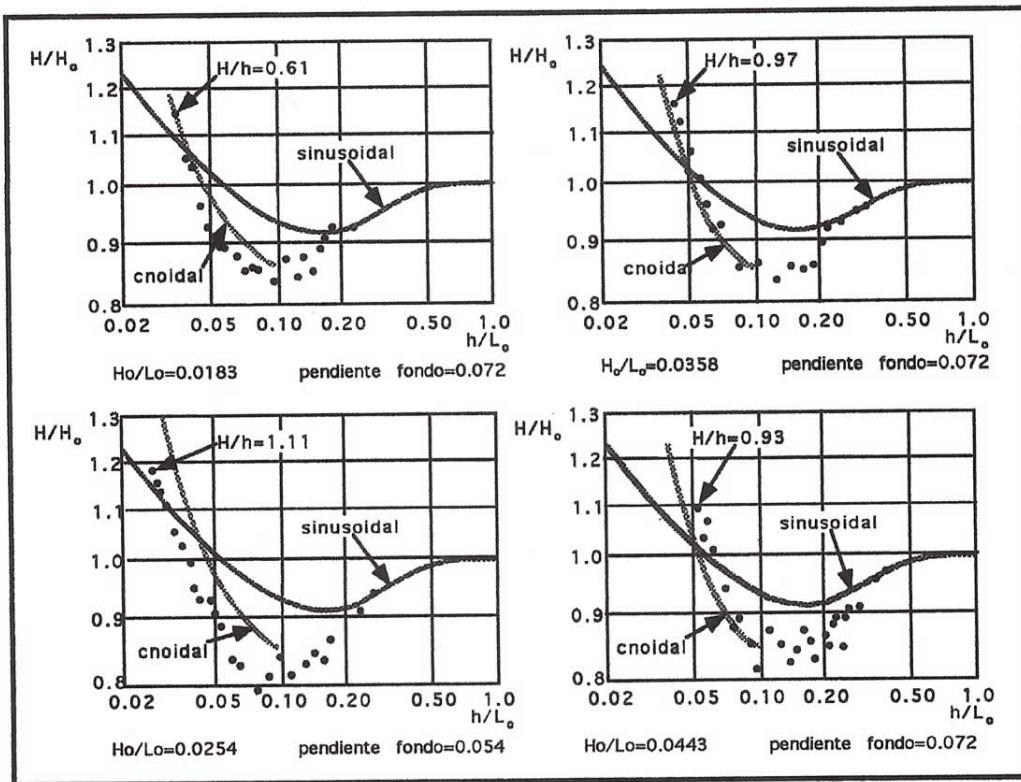


Fig. XI.9. Comparación de datos experimentales con las teorías sinusoidal (Stokes lineal) y cnoidal para un cierto rango de h/L_0 y H/H_0 . Fuente: figuras Madsen (1982), datos experimentales Brink-Kjaer y Jonsson (1973).